Toàn văn các bài dự thi

"Cuộc thi giải toán vectơ bằng nhiều cách"

Từ 29/08 đến 08/09/2013

Gồm có 18 bài dự thi

Mục lục

BBT

http://www.thapsang.vn

1. Trần Thị Nguyệt Anh - Hà Nội

Tiêu đề: Bài dự thi giải toán vectơ bằng nhiều cách

Họ và tên người dự thi: Trần Thị Nguyệt Anh

Địa chỉ: Tân Hội, Đan Phượng, Hà Nội

Số điện thoại: …22

Tệp tin đính kèm: Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

Vectơ: AB → +CD → =AD → +CB →

vectơ: AB + CD = AD + CB (1)

-Cách 1:

- (1)
  ↔ AB – AD = CB – CD
  ↔ DB = DB
  → ĐPCM
- (1)
  ↔ AB + BD + CD = AD + CB +BD
  ↔ AD + CD = AD + CD
  → ĐPCM
- (1)
  ↔ AB – CB = AD – CD
  ↔ AC = AC
  → ĐPCM
- Có : VT= AB + CD = AC + CB + CD = (AC + CD) + CB = AD + CB = VP
  → ĐPCM
- Có : VP= AD + CB = AD + CA + AB = CD + AB
  → ĐPCM

-Cách 2: Áp dụng quy tắc hình bình hành . Cho hbh ABCD

- có VT= AB + AC = 0
  VP= AD + CB = 0
  → ĐPCM
- (1)
  ↔ (AB + AD) +CD = AD + (AD + CB)
  ↔ AC + CD = AD
  → ĐPCM

2. Đặng Thị Kiều Linh - Nam Định

CMR 4đ A, B, C, D bất kì ta có:

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

Giải

I Biến đổi tương đương

* Cách 1

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

⇔ $\vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{CD}$

⇔ $\vec{AC} = \vec{AC}$ (luôn đúng)

Mà các phép biến đổi là tương đương

⇒ đpcm

* Cách 2

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

⇔ $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$

⇔ $\vec{DB} = \vec{DB}$ (luôn đúng)

Mà các phép biến đổi là tương đương

⇒ đpcm

II Từ một đẳng thức để suy về đẳng thức phải CM

Có $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

⇔ $\vec{AB} + \vec{CD} = -\vec{DA} - \vec{BC}$

⇔ $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

III Biến đổi vế trái

* Chèn điểm D vào $\vec{AB}$, chèn đ B vào $\vec{CD}$.

1) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

2) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DB} - \vec{DA} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{AD}$

3) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{CB}$

4) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DB} - \vec{DA} + \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{CB}$

* Chèn điểm C vào $\overrightarrow{AB}$, chèn điểm A vào $\overrightarrow{CD}$

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

* Giữ nguyên $\overrightarrow{CD}$, biến đổi $\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$ *

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

* Giữ nguyên $\overrightarrow{AB}$, biến đổi $\overrightarrow{CD}$.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

3. Phạm Bắc Phú - Nam Định

BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN VECTƠ BẰNG NHIỀU CÁCH

Họ và tên người dự thi: PHẠM BẮC PHÚ

Địa chỉ: Giáo viên Toán – Trường THPT A Hải Hậu.

Số điện thoại: …20.

Tệp tin đính kèm: duthi-PBP.doc

Phần một

Những cách giải khác nhau cho một bài toán chứng minh đẳng thức vectơ.

Đề bài:

Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D, ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Phạm vi kiến thức được dùng để giải: **Chỉ được dùng** các kiến thức ở:
Bài 1. Các định nghĩa và Bài 2. Tổng và hiệu của hai vectơ trong Sách giáo khoa Hình học 10, NXB Giáo dục, từ 2006 trở lại đây.
hoặc
Bài 1. Các định nghĩa, Bài 2. Tổng của các vectơ và Bài 3. Hiệu của hai vectơ trong Sách giáo khoa Hình học 10 Nâng cao, NXB Giáo dục, từ 2006 trở lại đây.

Cách 1: [Thực hiện biến đổi một vế, biến vế này thành vế kia]

Phương án 1.1- Biến đổi vế trái thành vế phải.

Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$ (theo quy tắc ba điểm)

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})$ (theo tính chất giao hoán, phân phối)

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (theo tính chất tổng của một vectơ với vectơ-không)

Vậy có điều phải chứng minh.

Phương án 1.2-Biến đổi vế phải thành vế trái.

Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có:

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

(Đpcm).

Cách 2: [Biến đổi hai vế về cùng một biểu thức giống nhau]

Phương án 2.1-Dùng quy tắc ba điểm, "chen điểm A" (làm xuất hiện các vectơ có điểm đầu là A).

* Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$ (1).

* Lại có: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$ (2).

* Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 2.2-Dùng quy tắc ba điểm, "chen điểm O bất kì".

Với O là điểm tùy ý:

* Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ (3).

* Lại có: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ (4).

* Từ (3) và (4) suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 2.3-Dùng quy tắc hiệu, làm xuất hiện các vectơ chung điểm đầu O nào đó.

Với O là điểm tùy ý:

* Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ (5).

* Lại có: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ (6).

* Từ (5) và (6) suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Nhận xét:

i) *Bản chất các phương án 2.1, 2.2, 2.3 là như nhau. Chúng ta có thể chọn O là một trong ba điểm cụ thể còn lại là B, C, D của bài toán (ta đã chọn O là A trong phương án 2.1); kết hợp với việc dùng một trong hai quy tắc ba điểm, quy tắc hiệu sẽ tạo ra các phương án giải có hình thức thể hiện khác nhau nữa, đề nghị bạn đọc tự trình bày tiếp.*

ii) *Ta để ý thấy một điều: Ở biểu thức vế trái có A và C là hai điểm đầu, B và D là hai điểm cuối của các vectơ, khi chuyển sang vế phải điều này vẫn bảo toàn! Đây là cơ sở để ta có bài toán khái quát và các bài toán tương tự! Chúng ta sẽ bàn thêm điều này trong phần hai!*

Phương án 2.4-Sử dụng cặp điểm mới có tính chất tựa như trung điểm.

* Với hai điểm A, C cho trước, tồn tại điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Thật vậy: Nếu A trùng C thì chọn M là A; nếu A và C phân biệt thì ta chọn M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tương tự, tồn tại điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})+(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND})=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM})+(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND})+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$$

$$=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN} \quad (7).$$

Lại có:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND})+(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM})+(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND})+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$$

$$=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN} \quad (8).$$

* Từ (7), (8) suy ra đpcm: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Cách 3: [Dùng phương pháp xét hiệu, để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh hiệu của chúng bằng vectơ-không]

Phương án 3.1-Xét hiệu giữa biểu thức vế trái và biểu thức vế phải.

Ta có: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 3.2- Xét hiệu giữa biểu thức vế trái và biểu thức vế phải.

Ta có:

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD})$$
$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 3.3-Xét hiệu giữa biểu thức vế phải và biểu thức vế trái.

Ta có $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 3.4-Xét hiệu giữa biểu thức vế phải và biểu thức vế trái

Ta có:

$$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD})$$
$$=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Cách 4: [Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng]

Xét đẳng thức cần chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (*).

Phương án 4.1-Cộng đồng thời mỗi vế của (*) với $\overrightarrow{DB}$ ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\quad (**)$$

Thấy (**) là đẳng thức đúng nên (*) là đẳng thức đúng, có Đpcm.

Phương án 4.2-Trừ đồng thời mỗi vế của (*) với $\overrightarrow{AB}$ ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\ \ \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\ (***)$$

Thấy (***) là đẳng thức đúng nên (*) là đẳng thức đúng, có Đpcm.

Những phương án tương tự khác bạn đọc có thể trình bày tương tự, chẳng hạn:

- Ta có thể cộng đồng thời mỗi vế với một trong các vectơ sau sẽ thu được một đẳng thức đúng tương đương: $\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AC}$.
- Ta có thể trừ đồng thời mỗi vế với một trong các vectơ sau sẽ thu được một đẳng thức đúng tương đương: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{BD}$.

Cách 5: [Biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả một đẳng thức đúng về đẳng thức cần chứng minh]

Thực chất của cách này là trình bày ngược lại các biến đổi ở cách 4, do đó có thể sử dụng một đẳng thức đúng thu được trong một phương án nào đó đã nêu ở cách 4, hoặc một đẳng thức đúng khác, rồi biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả về đẳng thức (*) cần chứng minh. Ta minh họa bằng ba phương án sau:

Phương án 5.1. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 5.2. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 5.3. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$ hay $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Ta cũng có thể xuất phát từ các đẳng thức khác, ví dụ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$, …bạn đọc tự trình bày.

Cách 6: Gọi M và N là các điểm thỏa mãn điều kiện (9): $\begin{cases}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{CB}\end{cases}$.

Khi đó có vế trái của (*): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$,

vế phải của (*): $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AN}$.

Để chứng minh (*), ta chứng minh $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$ hay chứng minh $M\equiv N$.

Thật vậy, từ (9) (cộng chéo vế) suy ra $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CN}\Leftrightarrow M\equiv N$.

Vậy (*) được chứng minh xong.

Phần hai

Một số vấn đề bàn luận thêm từ những lời giải trên.

A. Từ phương án giải 2.3 ta đi đến bài toán khái quát:

Cho 2n điểm tùy ý $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Gọi I = {1; 2; 3; …; n} là tập chỉ số. Khi đó các vectơ tổng có dạng $\sum\limits_{i,j\in I}\overrightarrow{A_iB_j}$ đều bằng nhau.

Chứng minh:

Xét O là điểm bất kì, theo quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{A_iB_j}=\overrightarrow{OB_j}-\overrightarrow{OA_i}, \forall i\in I, \forall j\in I$.

Do đó $\sum\limits_{i,j\in I}\overrightarrow{A_iB_j}=\sum\limits_{i,j\in I}(\overrightarrow{OB_j}-\overrightarrow{OA_i})=\sum\limits_{j\in I}\overrightarrow{OB_j}-\sum\limits_{i\in I}\overrightarrow{OA_i}=(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_n})-(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})$.

Vậy các vectơ tổng dạng $\sum\limits_{i,j\in I}\overrightarrow{A_iB_j}$ đều bằng nhau.

Xét trường hợp riêng cho 6 điểm, ta có kết quả bài tập 20 – Trang 18 – SGK Hình học Nâng cao 10 như sau:

Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}.$$

B. Việc nắm được “***nguyên tắc bảo toàn***” điểm đầu và điểm cuối của các vectơ khi chuyển từ vế nọ sang vế kia có thể giúp học sinh trả lời nhanh bài tập trắc nghiệm, ví dụ Bài 6 – Trang 36 – SGK Hình học Nâng cao 10 như sau:

Cho bốn điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ (B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$

- Học sinh thuộc sẵn đẳng thức sẽ biết (B) là đáp án.

- Học sinh biết dấu hiệu sẽ loại trừ được (A), (C), (D). Chẳng hạn trong (A), điểm C là điểm đầu bên vế trái thì sang vế phải nó là điểm cuối, do đó đẳng thức không thể xảy ra cho mọi bộ bốn điểm A, B, C, D được!

C. Thực chất phương án giải 2.4 dẫn ta tới kết quả sau:

C1-

Cho bốn điểm A, B, C, D với M là trung điểm của đoạn thẳng AC, N là trung điểm của đoạn thẳng CD. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$.

C2- Đặc biệt hóa:

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AC và BD trùng nhau.

(Đây là bài toán phát biểu tương tự như Bài tập 19 – Trang 18 – SGK HH Ncao 10)

C3- Tổng quát:

Gọi M là trọng tâm của hệ n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và N là trọng tâm của hệ n điểm $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Ta có đẳng thức: $\sum_{i,j\in I}\overrightarrow{A_iB_j} = n.\overrightarrow{MN}$.

D. Trong cách 6, sự tồn tại của hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CB}$ khi đã cho các điểm B, C, D, được khẳng định dựa trên kết quả của Hoạt động 2 – Trang 8 – SGK HH Ncao 10:

Cho vectơ $\vec{a}$ và một điểm O bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Suy ra hệ quả:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} \Leftrightarrow A \equiv A'\ .$$

Hệ quả này cũng được sử dụng hai lần ngay trong lời giải của cách 6.

E. Trong các cách 3, 4, 5, thực chất ta đã sử dụng các biến đổi tương đương sau chưa được đề cập thành tính chất một cách rõ ràng trong SGK:

i) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$.

ii) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{x}$.

iii) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{x} = \vec{b} - \vec{x}$.

iv) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$.

Như vậy vấn đề đặt ra là ta sẽ chứng minh các tính chất đó như thế nào? Ở đây tôi xin trình bày một cách chứng minh cho i) dựa trên hệ quả đã nêu trong mục D ở trên, các biến đổi còn lại rất mong sự trao đổi từ các bạn!

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$\vec{a} = \vec{b}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ hay A và B trùng nhau.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ hay A và B trùng nhau.

Vậy có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Tương tự: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$, từ đó suy ra Đpcm.

F. Để kết thúc bài viết, ta nhắc lại một số định hướng tổng quát giải quyết bài toán chứng minh đẳng thức như sau:

1. Xét hiệu hai vế.

2. Biến đổi một vế, đưa vế này thành vế kia (VT thành VP, VP thành VT).

3. Biến đổi đồng thời hai vế về cùng một biểu thức trung gian (VP = a = VT).

4. Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng đã biết.

5. Biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả từ một đẳng thức đúng đã biết về đẳng thức cần chứng minh.

6. Những phương pháp khác…

Hải Hậu, ngày 28 tháng 8 năm 2013.

Phạm Bắc Phú-HHA

4. Trần Văn Tú - Nam Định

Với 4 điểm A, B, C, D bất kì cm luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Cách 1:

ta có $\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{0}$

vì $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (t/c cặp vectơ)

(đẳng thức đc cm)

Cách 2: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{0}$ (vì $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$ cm như cách 1

~~Cách 3:~~ $\cancel{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}}$ -

Cách 3: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}$ (1)

mặt ≠ : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (đt đcm)

Cách 4: ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ vì $\left\{\begin{aligned}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{DC}\end{aligned}\right.$

vậy đt đcm

Ta lấy 1 điểm O bất kỳ:

Câu 5: ta luôn có ~~$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$~~

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CO})$ (tc giao hoán vectơ)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (đt đcm)

Câu 6: tương tự: với $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD})$ (+tc giao hoán vectơ) cách 1)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (đt đcm)

Câu 7: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (-\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$ tc giao hoán

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$ (đẳng thức đcm)

Câu 8: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ (đt đcm)

Câu 9: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ luôn đúng

$\Rightarrow$ đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (được chứng minh)

5. Đặng Ngọc Tuấn - Quảng Bình

Bài dự thi giải toán véc tơ bằng nhiều cách

Họ và tên: Đặng Ngọc Tuấn

Địa chỉ : Đức Sơn-Đức Ninh-Đồng Hới –Quảng Bình

Số điện thoại : …16

Đề bài: Chứng minh rằng : Với bốn điểm A,B,C,D bất kì ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

Bài Giải

Cách 1:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$ (hiển nhiên đúng)

Vậy : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 2:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}$ (hiển nhiên đúng)

Vậy : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 3:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$ (hiển nhiên đúng)

Vậy : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 4:

Với bốn điêm A,B,C,D bất kì nên ta giả sử có ít nhất ba điểm không thẳng hàng .Không mất tính tổng quát , giá sử có ba điểm A,B,C không thẳng hàng

Khi đó ta dựng hình bình hành OABC

Theo tính chất hình binh hành : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$ (do $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$) (*)

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$ (do $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$) (**)

Từ (*) và(**) ta suy ra điều phải chứng minh.

Vậy : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 5:

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AC và BD

Ta có:

$$2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)+\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{BN}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

Tương tự :

$$2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)+\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{BN}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

Do đó : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Vậy : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 6:

Nếu : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}>\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}>\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}>\overrightarrow{DB}$ (vô lí)

Nếu : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}<\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}<\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}<\overrightarrow{DB}$ (vô lí)

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 7:

Nếu: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}>\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}>\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}>\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}<\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}<\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 8:

Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}>\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CD}>\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}>\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}>\overrightarrow{CB}$ (vô lí)

Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}<\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CD}<\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}<\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}<\overrightarrow{CB}$ (vô lí)

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 9:

Trên các đoạn thẳng AC,BD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho

$$\frac{MA}{MC}=\frac{ND}{NB}=\frac{y}{x}(x\neq 0;y\neq 0)$$

Ta có :

$$(x+y).\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MN}=x\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)+y\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}\right)$$

$$=\left(x.\overrightarrow{MA}+y.\overrightarrow{MC}\right)+\left(x.\overrightarrow{DN}+y\overrightarrow{BN}\right)+x.\overrightarrow{AD}+y.\overrightarrow{CB}$$

Mặt khác từ giả thiết dễ thấy: $x.\overrightarrow{MA}+y.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$: $x.\overrightarrow{DN}+y\overrightarrow{BN}=\vec{0}$

Do đó : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{x+y}.\left(x.\overrightarrow{AD}+y.\overrightarrow{CB}\right)$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{x+y}.\left(x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{CD}\right)$

Vậy $\frac{1}{x+y}.\left(x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{MN}=\frac{1}{x+y}.\left(x.\overrightarrow{AD}+y.\overrightarrow{CB}\right)$

Từ đó áp dụng với x=y=1 thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 10:

Ta có :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

6. Nguyễn Mạnh Đạt - Nam Định

Cách 1 :

Ta có véctơ (AB) – véctơ (AD) = véctơ (DB) (1)

Cũng có véctơ (CB) –véctơ (CD) = véctơ (DB) (2)

Tư (1) và (2) ta có:

Véctơ (AB) – véctơ(AD) = véctơ (CB) –véctơ(CD) ⇔ véctơ (AB) + véctơ(CD) = véctơ (AD)+ véctơ (CB) .Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 2 :

Lấy O bất kì trong mặt phẳng chứa A, B, C,D

Ta có:

Véctơ (AB) = véctơ (AO) + véctơ (OB) (3)

Véctơ(CD) = véctơ (CO) + véctơ (OD) (4)

Véctơ (AD) = véctơ (AO) + véctơ (OD) (5)

Véctơ (CB) = véctơ(CO) + véctơ (OB) (6)

Từ (3)và (4) có: :

Véctơ (AB) + véctơ (CD) = véctơ (AO) + véctơ (OB) + véctơ (CO) + véc tơ (OD)

Từ (5) và (6) có:

Véctơ (AD) + véctơ (CD) = véctơ (AO) + véctơ (OD) + véctơ (CO) + véctơ (OB) = véctơ (AO) + véctơ (OB) + véctơ (CO)+ véctơ (OD) .

Do đó véctơ (AB) + véctơ (CD) = Véctơ (AD) + véctơ (CB) .Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 3 :

Ta có :Véctơ (AB) + véctơ (BD) = véctơ (AD)

Véctơ (CD) = véctơ (CB) + véctơ (BD)

Do đó : véc tơ (AB) + véc tơ (BD) + véctơ (CD) = véctơ (AD) + véc tơ (CB) + véc tơ (BD)

=> véctơ (AB) + véctơ (CD) = véctơ (AD) + véctơ (BD). Vậy ta có điều phải chứng minh.

7. Nguyễn Văn Đạt - Nam Định

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad (1)$$

Bài làm

Cách 1, (1) $\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}$ (ĐPCM)

Cách 2, (1) $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{AD}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AD}$ ($-\vec{CB} = \vec{BC}$)

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD}$ (ĐPCM)

Cách 3, ta có $\begin{cases} \vec{AD} = -\vec{DA} \\ \vec{CB} = -\vec{BC} \end{cases}$. Thay vào (1) ta

được: $\vec{AB} + \vec{CD} = -\vec{DA} - \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0}$ (ĐPCM)

Cách 4, (tương tự cách 3)

ta có $\begin{cases} \vec{AB} = -\vec{BA} \\ \vec{CD} = -\vec{DC} \end{cases}$. thay vào (1) ta

được: $-\vec{BA} - \vec{DC} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{DC}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{CC}$ (ĐPCM)

Cách 5, ta có $\begin{cases} \vec{CD} = -\vec{DC} \\ \vec{AD} = -\vec{DA} \end{cases}$ thay vào (1) ta

được: $\vec{AB} - \vec{DC} = -\vec{DA} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{CB} + \vec{DC}$

$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}$ (ĐPCM)

Cách 6, (tương tự cách 5)

ta có $\begin{cases} \vec{CB} = -\vec{BC} \\ \vec{CD} = -\vec{DC} \end{cases}$ thay vào (1) ta

được: $\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AD} - \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AC}$ (ĐPCM)

Cách 7, ta cộng hai vế của (1) với $\vec{BC}$ ta

được: $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{CB}$ $(\vec{BC} = -\vec{CB})$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD}$ (ĐPCM)

Cách 8, ta có $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \\ \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} \end{cases}$ thay vào (1) ta

được:

$\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{CB}$ (ĐPCM)

Cách 9, gọi O là một điểm bất kỳ

có $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$

$\vec{CD} = \vec{CO} + \vec{OD}$

$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD}$

$\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB}$. Thay vào (1) ta được:

$\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{CO} + \vec{OB}$

(ĐPCM)

Cách 10, Nếu điểm O ở trên (cách 9) trùng với một trong 4 điểm A, B, C, D (trường hợp này trùng với điểm A) thì ta

có $\vec{AB} = \vec{AA} + \vec{AB}$

~~được~~: $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD}$

$\vec{AD} = \vec{AA} + \vec{AD}$

$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}$. Thay vào (1)

ta được: $\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{AA} + \vec{AD} + \vec{CA} + \vec{AB}$

(ĐPCM)

8. Trần Thị Minh Tâm - Đồng Tháp

Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

BÀI LÀM

Cách 1:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0} \qquad (1)$$

Vì $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai vectơ đối nhau nên đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Vậy hệ thức ban đầu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ đúng.

Cách 2:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$
$$\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$$

Hệ thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Vậy hệ thức ban đầu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ đúng.

9. Vũ Ngọc Hòa - Đồng Nai

Bài toán: Chứng minh rằng: Với bất kỳ 4 điểm A, B, C và D ta luôn có:

$$\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}.$$

Lời giải:

Cách 1: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{AD}=\vec{CB}-\vec{CD} \Leftrightarrow \vec{DB}=\vec{DB}$. Đẳng thức cuối đúng, có đpcm.

Cách 2: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{CB}=\vec{AD}-\vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AD}+\vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AC}=\vec{AC}$

Đẳng thức cuối cùng đúng, có đpcm.

Cách 3: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{CB}+\vec{CD}-\vec{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AC}+\vec{CA}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA}=\vec{0}$.

Đẳng thức cuối đúng, có đpcm.

Cách 4: $\vec{AB}+\vec{CD}=(\vec{AD}+\vec{DB})+\vec{CD}=\vec{AD}+(\vec{CD}+\vec{DB})=\vec{AD}+\vec{CB}$. (đpcm)

Cách 5: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AB}+(\vec{CA}+\vec{AD})=(\vec{CA}+\vec{AB})+\vec{AD}=\vec{AD}+\vec{CB}$ (đpcm)

Cách 6: $\vec{AB}+\vec{CD}=(\vec{AD}+\vec{DB})+(\vec{CB}+\vec{BD})=(\vec{AD}+\vec{CB})+(\vec{DB}+\vec{BD})=\vec{AD}+\vec{CB}+\vec{0}=\vec{AD}+\vec{CB}$

Cách 7: $\vec{AB}+\vec{CD}=(\vec{MB}-\vec{MA})+(\vec{MD}-\vec{MC})$, M tùy ý

$=(\vec{MD}-\vec{MA})+(\vec{MB}-\vec{MC})=\vec{AD}+\vec{CB}$ (đpcm)

Cách 8: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB} \Leftrightarrow (\vec{MB}-\vec{MA})+(\vec{MD}-\vec{MC})=(\vec{MD}-\vec{MA})+(\vec{MB}-\vec{MC})$, M tùy ý

Đẳng thức cuối cùng đúng, có đpcm.

* Nếu biến đổi vế trái, hoặc viết vế trái trước ta có 8 cách trình bày khác

Vũ Ngọc Hoà, THPT Trấn Biên, Biên Hoà, Đồng Nai

10. Nguyễn Hữu Dũng - Nam Định

“Cuộc thi giải toán bằng nhiều cách”

Họ và tên người dự thi: Nguyễn Hữu Dũng.

Địa chỉ: Lớp 10A3,trường THPT Trần Hưng Đạo - tp.Nam Định.Tỉnh Nam Định.

Số điện thoại: …61.

Đề bài: Chứng minh với 4 điểm A,B,C,D ta luôn có:

. vectơ AB+ vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB.

Bài giải:

Cách 1: cộng them vào cả 2 vế với vectơ BD.

vectơ +vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB.

↔ *vectơ* $AB +$ vectơ $BD +$ vectơ$CD =$ vectơ$AD +$ vectơ$CB +$ vectơBD.

↔ vectơAD+ vectơ CD= vectơ AD+ vectơ CD (hiển nhiên).

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

Cách 2: Biến đổi vế trái giống với vế phải.

vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB.

Xét VT: vectơ AB+ vectơ CD= vectơ AO+ vectơ OB+ vectơ CO+ vectơ OD.

= vectơ AO+ vectơ OD+ vectơ CO+ vectơ CB.

= vectơ AD+ vectơ CB.

Ta thấy VT=VP →đpcm.

Cách 3:Biến đổi vế phải giống với vế trái.

vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB.

Xét VP: vectơ AD+ vectơ CB= vectơ AO+ vectơ OD+ vectơ CO+ vectơ OB.

= vectơ AO+ vectơ OB+ vectơ CO+ vectơ OD.

= vectơ AB+ vectơ CD.

Ta thấy VP=VT →đpcm.

Cách 4:Chuyển vế 2 vectơ từ vế phải sang vế trái.

vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB.

↔ vectơ AB+ vectơ CD−vectơ AD−vectơ CB=vectơ O.

↔ vectơ AB−vectơ AD+ vectơ CD−vectơ CB=vectơ O.

↔ vectơ BD+ vectơ DB=vectơ O.

↔ vectơ O=vectơ O (hiển nhiên).

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

Cách 5:Chuyển 1 vectơ từ VP sang VT (chuyển AD).

Vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB .

↔ vectơ AB+vectơ CD−vectơ AD=vectơ CB.

↔ vectơ AB+vectơ CD+vectơ DA=vectơ CB.

↔ vectơ AB+vectơ CA=vectơ CB.

↔ vectơ CA+vectơ AB=vectơ CB.

↔ vectơ CB=vectơ CB(hiển nhiên).

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

Cách 6: Chuyển 1 vectơ từ VT sang VP (chuyển vectơ AD).

Vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB .

↔ vectơ AB+vectơ CD−vectơ AD=vectơ CB.

↔ vectơ AB+vectơ DA+vectơ CD=vectơ CB.

↔ vectơ AB+vectơ CD+vectơ DA=vectơ CB.

↔ vectơ AB+vectơ CA=vectơ CB.

↔ vectơ CA+vectơ AB=vectơCB.

↔ vectơ CB=vectơ CB (hiển nhiên).

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

Cách 7:Chuyển đồng thời 1 vectơ từ VT sang VP và 1 vectơ từ VP sang VT.

Vectơ AB+vectơ CD=vectơ AD+vectơ CB .

↔ vectơ AB−vectơ AD=vectơ CB−vectơ CD.

↔ vectơ DB=vectơ DB (hiển nhiên).

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

11. Phạm Tuấn Nghĩa - Nam Định

C1: Chuyển 1 vectơ sang trái, một vec tơ sang phải, sẽ được hai vế là hiệu của hai véc tơ có chung hai điểm cuối hay tổng của hai véc tơ có chung điểm đầu và điểm cuối

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}(dpcm)$$

$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$$

C2: Chuyển một véc tơ sang phải hoặc trái, nhóm theo kiểu tổng hai vectơ có điểm đầu và cuối giống vectơ vế còn lại

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$$

$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$$

C3: Phân tích một vế thành hai vectơ còn lại

Chỉ phân tích một trong 4 vectơ ở hai vế

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}(dpcm)$$

Phân tích cả 2 vectơ ở một vế

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

C4: Chuyển hai vecto sang trái biến đổi thành vecto không

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}(dpcm)$$

C5: Thêm một bất kì O

-Liên quan đến tổng hai vectơ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$$

-Liên quan đến hiệu hai vectơ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$

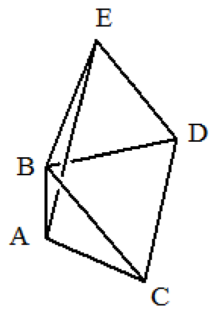
$$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow \vec{O}=\vec{O}$$

C6: Thêm bớt vào hai vế một véc tơ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}(1)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}(dpcm)$$

C7: Vẽ hình



BE //CD và BE = CD

Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}(2)$

BEDC là hình bình hành khi đó $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}(3)$

Từ (2) và (3) → $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Kết luận: Đây là một bài toán rất hay, có nhiều ý nghĩa trong toán véc tơ. Từ đây ta có thể áp dụng nhiều kiến thức quy tắc tam giác, quy tắc hình bình hành,...

12. Bùi Quốc Tuấn - Nam Định

Đề bài:

Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Cách giải 1:

Thật vậy, lấy một điểm O tùy ý ta luôn có:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh

Cách giải 2:

Giả sử: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (điều này luôn luôn đúng). Vậy đẳng thức đã cho luôn đúng => dpcm

Cách giải 3:

Thật vậy, lấy một điểm O tùy ý ta có:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$

Vậy đẳng thức đượ chứng minh.

Cách giải 4:

Ta có:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$

Điều này luôn luôn đúng , suy ra điều phải chứng minh.

13. Nguyễn Thị Thanh Thủy - Nam Định

Ta có:

vectoAB+vectoCD=vectoAD+vectoDB+vectoCD+vectoDD

=vectoAD+(vectoDB-vectoDc)

=vectoAD+vectoCB

(Đpcm)

14. Vũ Ngọc Ánh - Quảng Ninh

Họ và tên người dự thi: Vũ Ngọc Ánh
Địa chỉ: Tổ 4- Khu Vĩnh Tuy 1, Thị trấn Mạo Khê, Huyện Đông Triều, tỉnh Quảng Ninh.
Số điện thoại: …57

* Đề bài: Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 1:

AALấy một điểm O tùy ý, theo quy tắc về hiệu 2 véc tơ, ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

So sánh 2 đẳng thức trên ta suy ra: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 2:

+, Dùng quy tắc 3 điểm viết:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$$

Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

+, Dùng quy tắc 3 điểm viết:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

Do đó: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

Cách 3:

Biến đổi vế trái:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ = VP

Biến đổi vế phải:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \text{VT}$$

15. Nguyễn Đức Duy - Hà Nam

Đề bài: Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách 1: Chuyển vế: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$

Cách 2: Chuyển vế: $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}$

Cách 3: Xen điểm, biến đổi vế phải :

$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$$

Cách 4: Xen điểm, biến đổi vế phải :

$$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

Cách 5: Xen điểm, biến đổi vế trái:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}$$

Cách 6: Xen điểm, biến đổi vế trái:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$$

Cách 7: Xét điểm O tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}$$

Từ cách 3 đến cách 7 có thể dùng quy tắc trừ 2 vectơ để chứng minh. Nếu coi như khác nhau thì ta đã có 12 cách, còn nếu coi không khác với 5 cách đó thì ta đã có 7 cách.

Cách 8: Gọi D’ thỏa mãn: $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{CD}$ thì: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{CD'}+\overrightarrow{D'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DD'}$

Khi đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{AD'}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}$

Suy ra đpcm

Cách 9: Gọi D’ thỏa mãn: $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{CD}$. Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AI}$ (Dĩ nhiên vẫn đúng nếu A, B, D’ thẳng hàng)

Hiển nhiên: $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{CD}$. Do đó, chứng minh tương tự cách 8 ta được:

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DI}$

Do đó: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AI}$

Suy ra đpcm

Các cách nói trên (9 cách hoặc 9+5=14 cách) đã sử dụng các phép toán từ đơn giản đến kỹ năng dựng tổng các vectơ phức tạp hơn. Tương tự cho cách 8 là ta có thể dựng hiệu vectơ. Nói tóm lại có khá nhiều cách c/m bài toán trên. Trên đây, tác giả chỉ tạm nêu một vài cách tạm gọi là đơn giản, ngoài ra còn có các cách biến đổi phức tạp khác nữa. Vectơ thật thú vị và cũng khó, phải không?

16. Nguyễn Hoàng Việt - Nam Định

Họ và tên Nguyễn Việt Hoàng

Địa chỉ 10A3 THPT Trần Hưng Đạo ,TP Nam Định

Số điện thoại: …36

BÀI LÀM

Đề bài Với 4 điểm A,B,C,D ta luôn có $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$ (**đã làm 24 cách)**

Cách 1 $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AO}+\vec{OB}+\vec{CO}+\vec{OD}$

$\vec{AD}+\vec{CB}=\vec{AO}+\vec{OD}+\vec{CO}+\vec{OB}=\vec{AO}+\vec{OB}+\vec{CO}+\vec{OD}=VT$

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$Cách2/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{DB}+\vec{CD}=\vec{AD}+(\vec{CD}+\vec{DB})=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$Cách3/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AB}+\vec{CB}+\vec{BD}=(\vec{AB}+\vec{BD})+\vec{CB}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$Cách4/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{AD}=\vec{CB}-\vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{DB}=\vec{DB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách5/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{CB}=\vec{AD}-\vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{AC}=\vec{AC}(ĐÚNG)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách6/\ \vec{AD}+\vec{CB}=\vec{AB}+\vec{BD}+\vec{CB}=\vec{AB}+(\vec{CB}+\vec{BD})=\vec{AB}+\vec{CD}$

$\Rightarrow đpcm$

$Cách7/\ \vec{AD}+\vec{CB}=\vec{AD}+\vec{CD}+\vec{DB}=\vec{AD}+\vec{DB}+\vec{CD}=\vec{AB}+\vec{CD}$

$\Rightarrow đpcm$

$Cách8/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{CD}-\vec{AD}-\vec{CB}=0$

$\Leftrightarrow (\vec{AB}-\vec{AD})+(\vec{CD}-\vec{CB})=0$

$\Leftrightarrow \vec{DB}+\vec{BD}=0$

$\Leftrightarrow \vec{DD}=\vec{0}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách9/\ \vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{AD}+\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AD}+\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{DB}+\vec{CD}=\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{CB}=\vec{CB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 10 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DD} = \vec{AC} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AB} (đúng)$

$Cách 11 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{BB}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD} (đúng)$

$Cách 12 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD} (đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 13 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{AB} - \vec{CD}$

$\Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AB}) + (\vec{CD} - \vec{CD}) = (\vec{AD} - \vec{AB}) + (\vec{CB} - \vec{CD})$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BD} + \vec{DB}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BB} (đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 14 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{NB} + \vec{CD} = \vec{ND} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{NB} - \vec{ND} = \vec{CB} - \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB} (đúng \vec{0})$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 15 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{MD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{MD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{CB} - \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB} (đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 16 / \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CM} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{CM} + \vec{MB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{MB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{MB} - \vec{MD}$

$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB} (đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách17 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách18 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách19 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NC})=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{ND}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách20 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách21 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-NA+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách22 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NA}+CD=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách23 / \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow AB+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}(đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

$Cách 24 / AB + CD = AD + CB$

$\Leftrightarrow (MB - MA) + (ND - NC) = (MD - MA) + (NB - NC)$

$\Leftrightarrow MB - MA + ND - NC = MD - MA + NB - NC$

$\Leftrightarrow MB + ND = MD + NB$

$\Leftrightarrow MB - MD = NB - ND$

$\Leftrightarrow DB = DB (đúng)$

$\Leftrightarrow đpcm$

17. Vũ Trà My - Nam Định

Chứng minh $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{A}$

Cách 1

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$

Cách 2 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{BD} = \vec{BD}$

Cách 4 Có $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD}$

Từ VT $= \vec{AD} + \vec{CB}$ (đpcm)

Cách 5 Biến đổi vế phải

$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB}$

$= \vec{AB} + \vec{CD}$ (đpcm)

Cách 6 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\vec{BD}$

)

Cach 4 $\quad VT = \vec{AB} + \vec{CD}$

$= \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CA} + \vec{AD}$

$= \vec{CB} + \vec{AD} = VP$

$\vec{B}$

$+ \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DB}$

3 (vế $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{AD}$ | Cách + ...
VT = ...

$= \vec{AD} + \vec{CB}$ (đpcm)

5 Biến đổi vế trái

$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB}$

$= \vec{AB} + \vec{CD}$ (đpcm)

6 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DB}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ đpcm

7 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CD}$

8 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CB}$

9 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BE}$

$\Leftrightarrow \vec{AE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CE}$

<=> $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CB} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{AD} + \ldots$

<=> $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0}$

<=> đpcm

Cách 7: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

<=> $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD}$

<=> $\vec{AD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CD}$

Cách 8: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

<=> $\vec{AB} + \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CD}$

<=> $\vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CB}$

Cách 9: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CE}$

<=> $\vec{AB} + \vec{BE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BE}$

<=> $\vec{AE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CE}$

<=> $\vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AD} + \vec{DC}$

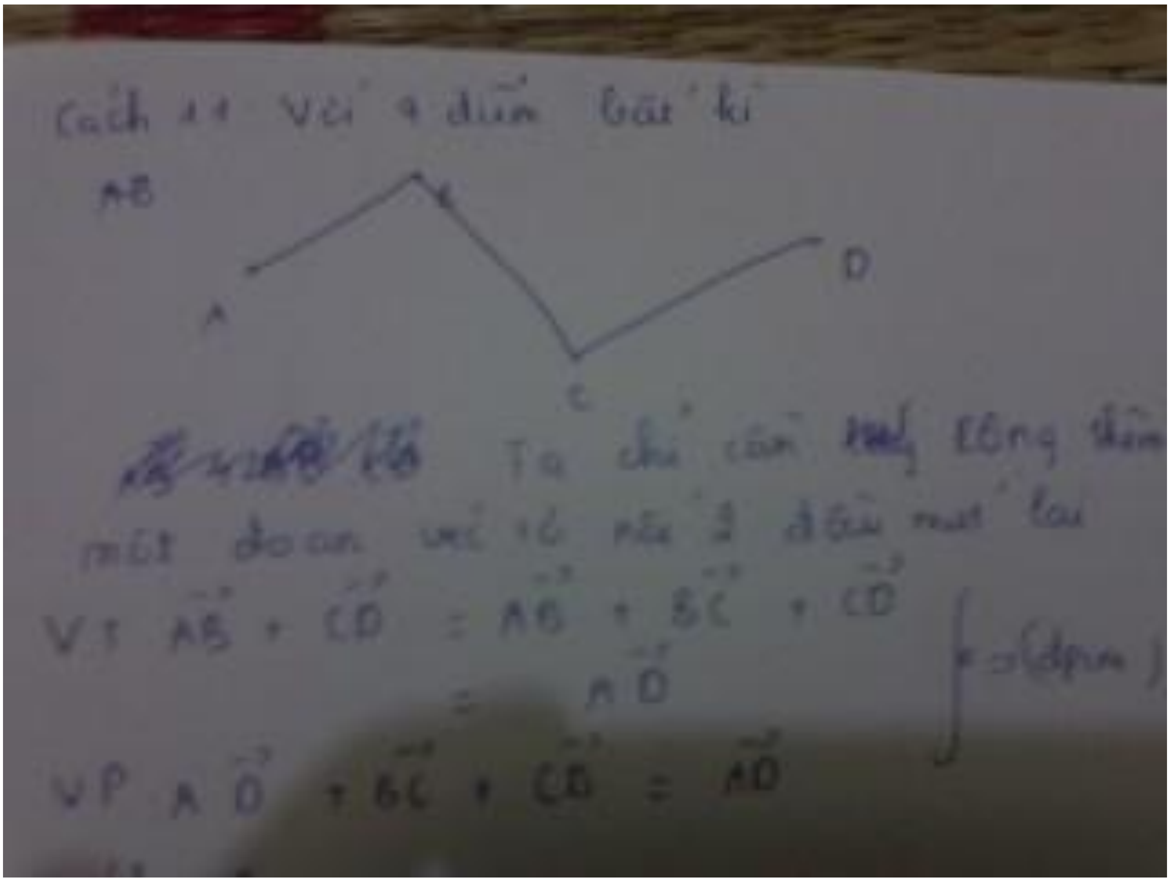
<=> $\vec{AC} = \vec{AC}$ (đpcm)

Cách 10: $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DM} = \vec{AD} + \vec{DM} + \vec{CB}$

<=> $\vec{AB} + \vec{CM} = \vec{AM} + \vec{CB}$

<=> $\vec{CM} + \vec{MA} = \vec{CB} + \vec{BA}$

<=> $\vec{CA} = \vec{CA}$ (đpcm)



Cách 1: Với 4 điểm bất kì

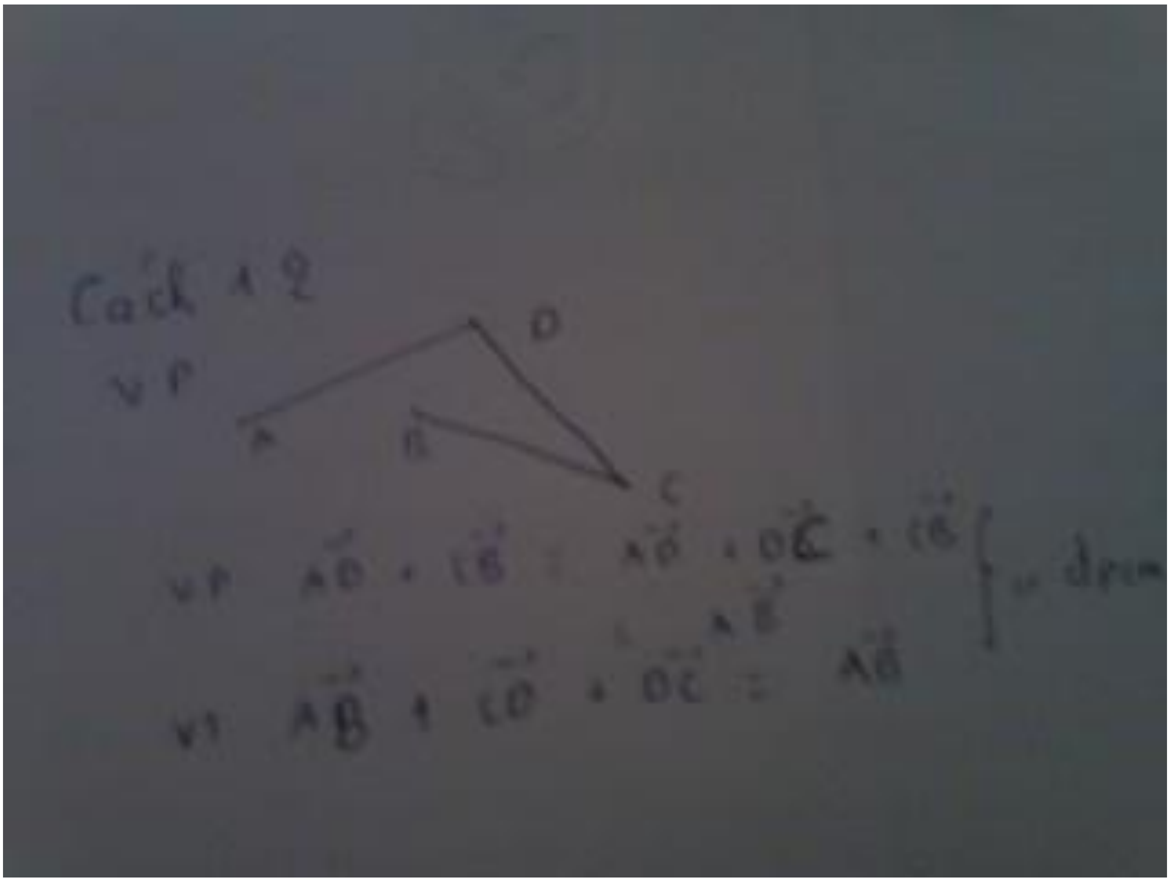
AB

Ta chỉ cần cộng thêm một đoạn vectơ nối 2 đầu mút lại

VT: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

VP: $\vec{AD} + \vec{BC} + \vec{CB} = \vec{AD}$

$\Rightarrow$ (đpcm)



Cách 2

VP

VP: $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

VT: $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DC} = \vec{AB}$

$\Rightarrow$ đpcm

18. Trần Xuân Đắc - Nam Định

BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN VÉCTƠ BẰNG NHIỀU CÁCH

Họ tên người dự thi: Trần Xuân Đắc

Địa chỉ: Thôn Xáy - Xã Bình Minh - Huyện Nam Trực - tỉnh Nam Định

Số điện thoại: [redacted]

Bài làm

Cách 1

$VT = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = VP$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 2

$VT = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

$= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = VP$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 3

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 4.

Gọi $A(x_A;\ y_A)$

$B(x_B;\ y_B)$

$C(x_C;\ y_C)$

$D(x_D;\ y_D)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$

$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C;\ y_D - y_C)$

$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A;\ y_D - y_A)$

$\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C;\ y_B - y_C)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_B - x_A + x_D - x_C;\ y_B - y_A + y_D - y_C) \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (x_D - x_A + x_B - x_C;\ y_D - y_A + y_B - y_C) \end{cases}$$

$$\text{hay} \begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_D - x_A + x_B - x_C;\ y_D - y_A + y_B - y_C) \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (x_D - x_A + x_B - x_C;\ y_D - y_A + y_B - y_C) \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$