

Toàn văn các bài dự thi

“Cuộc thi giải toán vectơ bằng nhiều cách”

Từ 29/08 đến 08/09/2013

Gồm có 18 bài dự thi

Mục lục

1. Trần Thị Nguyệt Anh - Hà Nội.....	2
2. Đặng Thị Kiều Linh - Nam Định.....	3
3. Phạm Bắc Phú - Nam Định.....	5
4. Trần Văn Tú - Nam Định.....	13
5. Đặng Ngọc Tuấn - Quảng Bình	15
6. Nguyễn Mạnh Đạt - Nam Định.....	17
7. Nguyễn Văn Đạt - Nam Định	18
8. Trần Thị Minh Tâm - Đồng Tháp	21
9. Vũ Ngọc Hòa - Đồng Nai	22
10. Nguyễn Hữu Dũng - Nam Định.....	23
11. Phạm Tuấn Nghĩa - Nam Định	25
12. Bùi Quốc Tuấn - Nam Định.....	26
13. Nguyễn Thị Thanh Thủy - Nam Định.....	27
14. Vũ Ngọc Ánh - Quảng Ninh	28
15. Nguyễn Đức Duy - Hà Nam	29
16. Nguyễn Hoàng Việt - Nam Định	30
17. Vũ Trà My - Nam Định	34
18. Trần Xuân Đắc - Nam Định.....	39

BBT

<http://www.thapsang.vn>

1. Trần Thị Nguyệt Anh - Hà Nội

7G/4C

Tiêu đề: Bài dự thi giải toán vector bằng nhiều cách

Họ và tên người dự thi: Trần Thị Nguyệt Anh

Địa chỉ: Tân Hội, Đan Phượng, Hà Nội

Số điện thoại: ...22

Tệp tin đính kèm: Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

Vector: $AB \rightarrow + CD \rightarrow = AD \rightarrow + CB \rightarrow$

vector: $AB + CD = AD + CB$ (1)

-Cách 1:

G1 . (1) C1
 $\Leftrightarrow AB - AD = CB - CD$
 $\Leftrightarrow DB = DB$
 $\rightarrow$ ĐPCM C1

G2 . (1)
 $\Leftrightarrow AB + BD + CD = AD + CB + BD$
 $\Leftrightarrow AD + CD = AD + CD$
 $\rightarrow$ ĐPCM C2

G3 . (1)
 $\Leftrightarrow AB - CB = AD - CD$
 $\Leftrightarrow AC = AC$
 $\rightarrow$ ĐPCM C3

G4 . Có : $VT = AB + CD = AC + CB + CD = (AC + CD) + CB = AD + CB = VP$ C4
 $\rightarrow$ ĐPCM

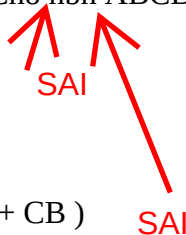
. Có : $VP = AD + CB = AD + CA + AB = CD + AB$

G5=G4 $\rightarrow$ ĐPCM

-Cách 2: Áp dụng quy tắc hình bình hành . Cho hhh ABCD

G6 . có $VT = AB + AC = 0$
 $VP = AD + CB = 0$
 $\rightarrow$ ĐPCM

G7 . (1)
 $\Leftrightarrow (AB + AD) + CD = AD + (AD + CB)$
 $\Leftrightarrow AC + CD = AD$
 $\rightarrow$ ĐPCM



CMR 4đ' A, B, C, D bất kì ta có:
 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

Giải

I Biến đổi tương đương

* Cách 1

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AC} \text{ (luôn đúng)}$$

Mà các phép biến đổi là tương đương

$\Rightarrow$ đpcm C1

* Cách 2

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB} \text{ (luôn đúng)} \quad \text{C2}$$

Mà các phép biến đổi là tương đương
 $\Rightarrow$ đpcm

II Sử dụng một đẳng thức để suy về đẳng thức phải
 CM

$$\text{Có: } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = -\vec{DA} - \vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad \text{C3}$$

III Biến đổi về trái

* Chèn điểm D vào $\vec{AB}$, chèn
 đ' B vào $\vec{CD}$.

$$1) \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad \text{C4}$$

$$2) \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DB} - \vec{DA} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{AD} \quad \text{C5}$$

$$3) \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$4) \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DB} - \vec{DA} + \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

{G8, G9, G10, G11, G12, G13, G14, G15, G16} = {G4, G5}

G8
G9
G10
G11

* Chọn điểm C vào $\overrightarrow{AB}$, chọn điểm A vào $\overrightarrow{CD}$

$$1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$4) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

* Giữ nguyên $\overrightarrow{CD}$, biến đổi $\overrightarrow{AB}$

$$1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$4) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

G12
G13
G14
G15

* Giữ nguyên $\overrightarrow{AB}$, biến đổi $\overrightarrow{CD}$

$$1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$4) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

G16
G17
G18
G19

3. Phạm Bắc Phú - Nam Định

16G/13C

BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN VECTƠ BẰNG NHIỀU CÁCH

Họ và tên người dự thi: PHẠM BẮC PHÚ

Địa chỉ: Giáo viên Toán – Trường THPT A Hải Hậu.

Số điện thoại: ...20.

Tệp tin đính kèm: duthi-PBP.doc

Phần một

Những cách giải khác nhau cho một bài toán chứng minh đẳng thức vector.

Đề bài:

Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Phạm vi kiến thức được dùng để giải: **Chỉ được dùng** các kiến thức ở:

Bài 1. Các định nghĩa và Bài 2. Tổng và hiệu của hai vector trong Sách giáo khoa Hình học 10, NXB Giáo dục, từ 2006 trở lại đây.

hoặc
Bài 1. Các định nghĩa, Bài 2. Tổng của các vector và Bài 3. Hiệu của hai vector trong Sách giáo khoa Hình học 10 Nâng cao, NXB Giáo dục, từ 2006 trở lại đây.

Cách 1: [Thực hiện biến đổi một vế, biến vế này thành vế kia]

Phương án 1.1- Biến đổi vế trái thành vế phải.

G1 Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \quad (\text{theo quy tắc ba điểm}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) \quad (\text{theo tính chất giao hoán, phân phối}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{theo tính chất tổng của một vector với vector-không})\end{aligned}$$

Vậy có điều phải chứng minh. **C1**

Phương án 1.2- Biến đổi vế phải thành vế trái.

G2=G1 Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

(Đpcm).

Cách 2: [Biến đổi hai vế về cùng một biểu thức giống nhau]

Phương án 2.1- Dùng quy tắc ba điểm, “chen điểm A” (làm xuất hiện các vector có điểm đầu là A).

- G3**
- * Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \quad (1).$
 - * Lại có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \quad (2).$
 - * Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad (\text{Đpcm}). \quad \text{C2}$

Phương án 2.2- Dùng quy tắc ba điểm, “chen điểm O bất kì”.

G4 Với O là điểm tùy ý:

$$* \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \quad (3).$$

* Lại có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ (4).

* Từ (3) và (4) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C3**

Phương án 2.3-Dùng quy tắc hiệu, làm xuất hiện các vector chung điểm đầu O nào đó.

G5 Với O là điểm tùy ý:

* Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ (5).

* Lại có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ (6).

* Từ (5) và (6) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C4**

Nhận xét:

- Bản chất các phương án 2.1, 2.2, 2.3 là như nhau. Chúng ta có thể chọn O là một trong ba điểm cụ thể còn lại là B, C, D của bài toán (ta đã chọn O là A trong phương án 2.1); kết hợp với việc dùng một trong hai quy tắc ba điểm, quy tắc hiệu sẽ tạo ra các phương án giải có hình thức thể hiện khác nhau nữa, đề nghị bạn đọc tự trình bày tiếp.
- Ta để ý thấy một điều: Ở biểu thức về trái có A và C là hai điểm đầu, B và D là hai điểm cuối của các vector, khi chuyển sang về phải điều này vẫn bảo toàn! Đây là cơ sở để ta có bài toán khái quát và các bài toán tương tự! Chúng ta sẽ bàn thêm điều này trong phần hai!

Phương án 2.4-Sử dụng cặp điểm mới có tính chất tựa như trung điểm.

* Với hai điểm A, C cho trước, tồn tại điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Thật vậy: Nếu A trùng C thì chọn M là A; nếu A và C phân biệt thì ta chọn M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tương tự, tồn tại điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

G6 * Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}) = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}) + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \quad (7).\end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}) + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \quad (8).\end{aligned}$$

* Từ (7), (8) suy ra đpcm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **C5**

Cách 3: [Dùng phương pháp xét hiệu, để chứng minh hai vector bằng nhau ta chứng minh hiệu của chúng bằng vector-không]

Phương án 3.1-Xét hiệu giữa biểu thức về trái và biểu thức về phải.

G7 Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C6**

Phương án 3.2- Xét hiệu giữa biểu thức về trái và biểu thức về phải.

G8 Ta có:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \\&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C7**

Phương án 3.3-Xét hiệu giữa biểu thức về phải và biểu thức về trái.

G9=G7 Ta có $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Phương án 3.4-Xét hiệu giữa biểu thức về phải và biểu thức về trái

G10=G8 Ta có:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) \\&= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm).

Cách 4: [Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng]

Xét đẳng thức cần chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (*).

Phương án 4.1-Cộng đồng thời mỗi vế của (*) với $\overrightarrow{DB}$ ta có:

G11 $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CB}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ (**)

Thấy (**) là đẳng thức đúng nên (*) là đẳng thức đúng, có Đpcm. **C8**

Phương án 4.2-Trừ đồng thời mỗi vế của (*) với $\overrightarrow{AB}$ ta có:

G12 $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}$ (***)

Thấy (***) là đẳng thức đúng nên (*) là đẳng thức đúng, có Đpcm. **C9**

Những phương án tương tự khác bạn đọc có thể trình bày tương tự, chẳng hạn:

- Ta có thể cộng đồng thời mỗi vế với một trong các vector sau sẽ thu được một đẳng thức đúng tương đương: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.
- Ta có thể trừ đồng thời mỗi vế với một trong các vector sau sẽ thu được một đẳng thức đúng tương đương: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BD}$.

Cách 5: [Biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả một đẳng thức đúng về đẳng thức cần chứng minh]

Thực chất của cách này là trình bày ngược lại các biến đổi ở cách 4, do đó có thể sử dụng một đẳng thức đúng thu được trong một phương án nào đó đã nêu ở cách 4, hoặc một đẳng thức đúng khác, rồi biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả về đẳng thức (*) cần chứng minh. Ta minh họa bằng ba phương án sau:

G13

Phương án 5.1. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C10**

G14

Phương án 5.2. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C11**

G15

Phương án 5.3. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, luôn có: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ hay $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Đpcm). **C12**

Ta cũng có thể xuất phát từ các đẳng thức khác, ví dụ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$, ... bạn đọc tự trình bày.

G16

Cách 6: Gọi M và N là các điểm thỏa mãn điều kiện (9):
$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Khi đó có vế trái của (*): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$,

vế phải của (*): $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN}$.

Để chứng minh (*), ta chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ hay chứng minh $M \equiv N$.

Thật vậy, từ (9) (cộng chéo vế) suy ra $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow M \equiv N$.

Vậy (*) được chứng minh xong. **C13**

Phần hai

Một số vấn đề bàn luận thêm từ những lời giải trên.

A. Từ phương án giải 2.3 ta đi đến bài toán khái quát:

Cho $2n$ điểm tùy ý $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$. Gọi $I = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ là tập chỉ số. Khi đó các vector tổng có dạng $\sum_{i,j \in I} \overrightarrow{A_i B_j}$ đều bằng nhau.

Chứng minh:

Xét O là điểm bất kì, theo quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{A_i B_j} = \overrightarrow{OB_j} - \overrightarrow{OA_i}, \forall i \in I, \forall j \in I$.

Do đó $\sum_{i,j \in I} \overrightarrow{A_i B_j} = \sum_{i,j \in I} (\overrightarrow{OB_j} - \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{j \in I} \overrightarrow{OB_j} - \sum_{i \in I} \overrightarrow{OA_i} = (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$.

Vậy các vector tổng dạng $\sum_{i,j \in I} \overrightarrow{A_i B_j}$ đều bằng nhau.

Xét trường hợp riêng cho 6 điểm, ta có kết quả bài tập 20 – Trang 18 – SGK Hình học Nâng cao 10 như sau:

Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

B. Việc nắm được “**nguyên tắc bảo toàn**” điểm đầu và điểm cuối của các vector khi chuyển từ vế nọ sang vế kia có thể giúp học sinh trả lời nhanh bài tập trắc nghiệm, ví dụ Bài 6 – Trang 36 – SGK Hình học Nâng cao 10 như sau:

Cho bốn điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

- Học sinh thuộc sẵn đẳng thức sẽ biết (B) là đáp án.

- Học sinh biết dấu hiệu sẽ loại trừ được (A), (C), (D). Chẳng hạn trong (A), điểm C là điểm đầu bên vế trái thì sang vế phải nó là điểm cuối, do đó đẳng thức không thể xảy ra cho mọi bộ bốn điểm A, B, C, D được!

C. Thực chất phương án giải 2.4 dẫn ta tới kết quả sau:

C1-

Cho bốn điểm A, B, C, D với M là trung điểm của đoạn thẳng AC , N là trung điểm của đoạn thẳng CD . Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$.

C2- Đặc biệt hóa:

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AC và BD trùng nhau.

(Đây là bài toán phát biểu tương tự như Bài tập 19 – Trang 18 – SGK HH Ncao 10)

C3- Tổng quát:

Gọi M là trọng tâm của hệ n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và N là trọng tâm của hệ n điểm $B_1, B_2, \dots, B_n$.
Ta có đẳng thức: $\sum_{i,j \in I} \overrightarrow{A_i B_j} = n \cdot \overrightarrow{MN}$.

D. Trong cách 6, sự tồn tại của hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CB}$ khi đã cho các điểm B, C, D, được khẳng định dựa trên kết quả của Hoạt động 2 – Trang 8 – SGK HH Ncao 10:

Cho vectơ $\vec{a}$ và một điểm O bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Suy ra hệ quả:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} \Leftrightarrow A \equiv A'.$$

Hệ quả này cũng được sử dụng hai lần ngay trong lời giải của cách 6.

E. Trong các cách 3, 4, 5, thực chất ta đã sử dụng các biến đổi tương đương sau chưa được đề cập thành tính chất một cách rõ ràng trong SGK:

i) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{0}.$

ii) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{x}.$

iii) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{x} = \vec{b} - \vec{x}.$

iv) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{x} = \vec{b}.$

Như vậy vấn đề đặt ra là ta sẽ chứng minh các tính chất đó như thế nào? Ở đây tôi xin trình bày một cách chứng minh cho i) dựa trên hệ quả đã nêu trong mục D ở trên, các biến đổi còn lại rất mong sự trao đổi từ các bạn!

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$\vec{a} = \vec{b}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ hay A và B trùng nhau.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ hay A và B trùng nhau.

Vậy có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Tương tự: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$, từ đó suy ra Đpcm.

F. Để kết thúc bài viết, ta nhắc lại một số định hướng tổng quát giải quyết bài toán chứng minh đẳng thức như sau:

1. Xét hiệu hai vế.

2. Biến đổi một vế, đưa vế này thành vế kia (VT thành VP, VP thành VT).

3. Biến đổi đồng thời hai vế về cùng một biểu thức trung gian ($VP = a = VT$).

4. Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng đã biết.

5. *Biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả từ một đẳng thức đúng đã biết về đẳng thức cần chứng minh.*

6. *Những phương pháp khác...*

Hải Hậu, ngày 28 tháng 8 năm 2013.

Phạm Bắc Phú-HHA

4. Trần Văn Tú - Nam Định 9G/5C

Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ em luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Case 1:

G1 tạo' $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{0}$

Vi' $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (H.C đúng với t.b)

(đáp theo đề em) C1

Case 2: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$

G2 = G1 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{0}$

(vi' $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}$ em hiểu case 1)

~~Case 3: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}$~~

Case 3: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$

G3 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}$ (1)

mi' $\neq$: $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$ (2)

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$

tr' (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (đt đúng) C2

Case 4: tạo' $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC})$

G4 = G3 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ vi' $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DC} \end{array} \right.$

vậy đt đúng

Ta lấy 1 điểm O bất kỳ.

G5 Case 5: ta liên hệ ~~$\vec{AB}$~~ ~~$= \vec{AO} + \vec{OB}$~~ ~~$\vec{CD}$~~ ~~$= \vec{CO} + \vec{OD}$~~

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\vec{CD} = \vec{CO} + \vec{OD}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{AO} + \vec{OB}) + (\vec{CO} + \vec{OD})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{AO} + \vec{OD}) + (\vec{CB} + \vec{CO}) \quad (\text{Hc giao hoán vectơ})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad (\text{đt đcm}) \quad \text{C3}$$

Case 6: thay M

$$\text{với } \vec{AD} + \vec{CB} = (\vec{AO} + \vec{OD}) + (\vec{CO} + \vec{OB})$$

$$\text{G6=G5} \quad \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = (\vec{AO} + \vec{OB}) + (\vec{CO} + \vec{OD}) \quad (\text{Hc giao hoán vectơ}) \quad \text{ach 1)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CD} \quad (\text{đt đcm})$$

$$\text{Case 7: } \vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{OB} - \vec{OA}) + (-\vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\text{G7} \quad \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{OB} - \vec{OC}) + (\vec{OD} - \vec{OA}) \quad \text{Hc giao hoán}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CB} + \vec{AD} \quad (\text{đt đcm}) \quad \text{C4}$$

$$\text{Case 8: } \vec{AD} + \vec{CB} = (\vec{OD} - \vec{OA}) + (\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\text{G8=G7} \quad \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = (\vec{OD} - \vec{OC}) + (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{CD} + \vec{AB} \quad (\text{đt đcm})$$

$$\text{Case 9: } \vec{AB} + \vec{CD} + (-\vec{AD} - \vec{CB}) = \vec{AD} + \vec{CB} + (-\vec{AD} - \vec{CB})$$

$$\text{G9} \quad \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{CB}$$

$$\Rightarrow \vec{DB} + \vec{BD} = \vec{0} + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{0} \quad \text{hiển thị}$$

$$\Rightarrow \text{đt đcm } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad (\text{đt đcm}) \quad \text{C5}$$

5. Đặng Ngọc Tuấn - Quảng Bình

10G/4C

Bài dự thi giải toán véc tơ bằng nhiều cách

Họ và tên: Đặng Ngọc Tuấn

Địa chỉ : Đức Sơn-Đức Ninh-Đồng Hới –Quảng Bình

Số điện thoại : ...16

Đề bài: Chứng minh rằng : Với bốn điểm A,B,C,D bất kì ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Bài Giải

Cách 1: G1

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Vậy : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ C1

Cách 2: G2

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Vậy : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ C2

Cách 3: G3

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Vậy : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ C3

Cách 4: G4

Với bốn điểm A,B,C,D bất kì nên ta giả sử có ít nhất ba điểm không thẳng hàng .Không mất tính tổng quát , giả sử có ba điểm A,B,C không thẳng hàng

Khi đó ta dựng hình bình hành OABC

Theo tính chất hình bình hành : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ (do $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$) (*)

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} \text{ (do } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \text{) (**)}$$

Từ (*) và(**) ta suy ra điều phải chứng minh.

Vậy : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 5: G5

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AC và BD

Ta có:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Tương tự :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$



SAI

KHONG HOP LE

Do đó : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Vậy : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 6: G6

Nếu : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} > \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} > \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} > \overrightarrow{DB}$ (vô lí)

Nếu : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} < \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} < \overrightarrow{DB}$ (vô lí) **SAI**

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 7: G7

Nếu: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} > \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} > \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} > \overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AD}$ (vô lí) **SAI**

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 8: G8

Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} > \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CD} > \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} > \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} > \overrightarrow{CB}$ (vô lí)

Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} < \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{CB}$ (vô lí)

SAI

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 9: G9

Trên các đoạn thẳng AC,BD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho

$$\frac{MA}{MC} = \frac{ND}{NB} = \frac{y}{x} (x \neq 0; y \neq 0)$$

KHONG HOP LE

Ta có :

$$\begin{aligned} (x+y).\overrightarrow{MN} &= x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MN} = x(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) + y(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}) \\ &= (x.\overrightarrow{MA} + y.\overrightarrow{MC}) + (x.\overrightarrow{DN} + y.\overrightarrow{BN}) + x.\overrightarrow{AD} + y.\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Mặt khác từ giả thiết dễ thấy: $x.\overrightarrow{MA} + y.\overrightarrow{MC} = \vec{0} : x.\overrightarrow{DN} + y.\overrightarrow{BN} = \vec{0}$

Do đó : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{x+y} . (x.\overrightarrow{AD} + y.\overrightarrow{CB})$

Chúng minh tương tự $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{x+y} . (x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{CD})$

Vậy $\frac{1}{x+y} . (x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{MN} = \frac{1}{x+y} . (x.\overrightarrow{AD} + y.\overrightarrow{CB})$

Từ đó áp dụng với x=y=1 thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Cách 10: G10

Ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ **C4**

6. Nguyễn Mạnh Đạt - Nam Định 3G/3C

Cách 1 : G1

Ta có véc tơ $(AB) - \text{véc tơ } (AD) = \text{véc tơ } (DB)$ (1)

Cũng có véc tơ $(CB) - \text{véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (DB)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$\text{Véc tơ } (AB) - \text{véc tơ } (AD) = \text{véc tơ } (CB) - \text{véc tơ } (CD) \Leftrightarrow \text{véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (AD) + \text{véc tơ } (CB)$. Vậy ta có điều phải chứng minh. C1

Cách 2 : G2

Lấy O bất kì trong mặt phẳng chứa A, B, C, D

Ta có:

$$\text{Véc tơ } (AB) = \text{véc tơ } (AO) + \text{véc tơ } (OB) \quad (3)$$

$$\text{Véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (CO) + \text{véc tơ } (OD) \quad (4)$$

$$\text{Véc tơ } (AD) = \text{véc tơ } (AO) + \text{véc tơ } (OD) \quad (5)$$

$$\text{Véc tơ } (CB) = \text{véc tơ } (CO) + \text{véc tơ } (OB) \quad (6)$$

Từ (3) và (4) có :

$$\text{Véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (AO) + \text{véc tơ } (OB) + \text{véc tơ } (CO) + \text{véc tơ } (OD)$$

Từ (5) và (6) có:

$$\text{Véc tơ } (AD) + \text{véc tơ } (CB) = \text{véc tơ } (AO) + \text{véc tơ } (OD) + \text{véc tơ } (CO) + \text{véc tơ } (OB) = \text{véc tơ } (AO) + \text{véc tơ } (OB) + \text{véc tơ } (CO) + \text{véc tơ } (OD)$$

Do đó $\text{véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (CD) = \text{Véc tơ } (AD) + \text{véc tơ } (CB)$. Vậy ta có điều phải chứng minh. C2

Cách 3 : G3

$$\text{Ta có : } \text{Véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (BD) = \text{véc tơ } (AD)$$

$$\text{Véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (CB) + \text{véc tơ } (BD)$$

$$\text{Do đó : } \text{véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (BD) + \text{véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (AD) + \text{véc tơ } (CB) + \text{véc tơ } (BD)$$

$$\Rightarrow \text{véc tơ } (AB) + \text{véc tơ } (CD) = \text{véc tơ } (AD) + \text{véc tơ } (BD). \text{ Vậy ta có điều phải chứng minh. C3}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad (1)$$

Bài làm

cách 1, (1) $\Rightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$
 $\Rightarrow \vec{DB} = \vec{DB} \quad (\text{ĐPCM})$ C1

cách 2, (1) $\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{AD}$
 $\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AD} \quad (-\vec{CB} = \vec{BC})$
 $\Rightarrow \vec{AD} = \vec{AD} \quad (\text{ĐPCM})$ C2

cách 3, ta có $\begin{cases} \vec{AD} = -\vec{DA} \\ \vec{CB} = -\vec{BC} \end{cases}$. Thay vào (1) ta
 $\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = -\vec{DA} - \vec{BC}$
 $\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{AA} = \vec{0} \quad (\text{ĐPCM})$

G3=G2

cách 4, (thay từ cách 3)
 ta có $\begin{cases} \vec{AD} = -\vec{DA} \\ \vec{CB} = -\vec{BC} \end{cases}$. Thay vào (1) ta
 $\Rightarrow -\vec{DA} - \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CD}$
 $\Rightarrow \vec{0} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC}$
 $\Rightarrow \vec{0} = \vec{CC} \quad (\text{ĐPCM})$

G4=G3

Cách 5, ta có $\begin{cases} \vec{CB} = -\vec{BC} \\ \vec{AB} = -\vec{BA} \end{cases}$ thay vào (1) ta

G5=G3

thế: $\vec{AB} - \vec{BC} = -\vec{BA} + \vec{CB}$

(*) $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{CB} + \vec{BC}$

(*) $\vec{AB} = \vec{CB} \quad (\text{ĐPCM})$

Cách 6, (hướng từ cách 5)

G6=G3

ta có $\begin{cases} \vec{CB} = -\vec{BC} \\ \vec{CO} = -\vec{OC} \end{cases}$ thay vào (1) ta

thế: $\vec{AB} - \vec{OC} = \vec{AB} - \vec{BC}$

(*) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{OC}$

(*) $\vec{AC} = \vec{AC} \quad (\text{ĐPCM})$

Cách 7, ta cộng lại vế' của (1) vế' $\vec{BC}$ ta

G7

thế: $\vec{AB} + \vec{CO} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CB} + \vec{BC}$

(*) $\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{CB} - \vec{CB} \quad (\vec{BC} = -\vec{CB})$

(*) $\vec{AB} = \vec{AB} \quad (\text{ĐPCM}) \quad \text{C3}$

Cách 8, ta có $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \\ \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} \end{cases}$ thay vào (1) ta

G8

thế: $\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CB} \quad (\text{ĐPCM})$

C4

Cách 9, gọi O là một điểm bất kỳ

G9

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\vec{CO} = \vec{CO} + \vec{OB}$$

$$\vec{AO} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} \text{ . Thay vào (1) ta}$$

được:

$$\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OB}$$

C5

(ĐPCM)

Cách 10, Chọn điểm O ở trên (cách 9) trùng với một trong 4 điểm A, B, C, D (thường lấy A), thì ta

G10=G9

$$\vec{AB} = \vec{AA} + \vec{AB}$$

$$\vec{CO} = \vec{CA} + \vec{AB}$$

$$\vec{AD} = \vec{AA} + \vec{AB}$$

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} \text{ . Thay vào (1)}$$

$$\text{ta được: } \vec{AA} + \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{AA} + \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{AB} \text{ (ĐPCM)}$$

8. Trần Thị Minh Tâm - Đồng Tháp

2G/2C

Chúng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

BÀI LÀM

Cách 1: **G1**

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} &= \vec{0} \quad (1) \quad \mathbf{C1}\end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai vector đối nhau nên đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Vậy hệ thức ban đầu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ đúng.

Cách 2: **G2**

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= \vec{0} \quad \mathbf{C2}\end{aligned}$$

Hệ thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Vậy hệ thức ban đầu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ đúng.

Bài toán: Chứng minh rằng: Với bất kỳ 4 điểm A, B, C và D ta luôn có:
 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

Lời giải:

G1 Cách 1: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}$. Đẳng thức cuối đúng, có đpcm. C1

G2 Cách 2: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AC}$ C2

G3=G2 Cách 3: Đẳng thức cuối cũng đúng, có đpcm.
 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} - \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$
 $\vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0}$.

G4 Cách 4: Đẳng thức cuối đúng, có đpcm.
 $\vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{AD} + \vec{DB}) + \vec{CB} = \vec{AD} + (\vec{CD} + \vec{DB}) = \vec{AD} + \vec{CB}$. (đpcm) C3

G5=G4 Cách 5: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + (\vec{CA} + \vec{AD}) = (\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ (đpcm)

G6=G4 Cách 6: $\vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{AD} + \vec{DB}) + (\vec{CB} + \vec{BD}) = (\vec{AD} + \vec{CB}) + (\vec{DB} + \vec{BD}) = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0} = \vec{AD} + \vec{CB}$

G7 Cách 7: $\vec{AB} + \vec{CD} = (\vec{MB} - \vec{MA}) + (\vec{MD} - \vec{MC}) \stackrel{\text{mtuỳ y'}}{=} (\vec{MD} - \vec{MA}) + (\vec{MB} - \vec{MC}) = \vec{AD} + \vec{CB}$ (đpcm) C4

G8 Cách 8: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow (\vec{MB} - \vec{MA}) + (\vec{MD} - \vec{MC}) = (\vec{MD} - \vec{MA}) + (\vec{MB} - \vec{MC})$, mtuỳ y'
 Đẳng thức cuối cũng đúng, có đpcm. C5

* Nếu biến đổi về hai, hoặc viết về hai trước ta có 8 cách trình bày khác

Vũ Ngọc Hòa, THPT Trần Bửu, Biên Hòa, Đồng Nai

“Cuộc thi giải toán bằng nhiều cách”

Họ và tên người dự thi: Nguyễn Hữu Dũng.

Địa chỉ: Lớp 10A3, trường THPT Trần Hưng Đạo - tp.Nam Định.Tỉnh Nam Định.

Số điện thoại: ...61.

Đề bài: Chứng minh với 4 điểm A,B,C,D ta luôn có:

$$\text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB.$$

Bài giải:

G1

Cách 1: cộng thêm vào cả 2 vế với vector BD.

$$\text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } BD + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB + \text{vector } BD.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AD + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CD \text{ (hiển nhiên).}$$

Vậy điều phải chứng minh là đúng. **C1**

Cách 2: Biến đổi vế trái giống với vế phải.

G2 $\text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB.$

$$\text{Xét VT: } \text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AO + \text{vector } OB + \text{vector } CO + \text{vector } OD.$$

$$= \text{vector } AO + \text{vector } OD + \text{vector } CO + \text{vector } CB.$$

$$= \text{vector } AD + \text{vector } CB.$$

Ta thấy VT=VP $\rightarrow$ đpcm. **C2**

Cách 3: Biến đổi vế phải giống với vế trái.

G3=G2 $\text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB.$

$$\text{Xét VP: } \text{vector } AD + \text{vector } CB = \text{vector } AO + \text{vector } OD + \text{vector } CO + \text{vector } OB.$$

$$= \text{vector } AO + \text{vector } OB + \text{vector } CO + \text{vector } OD.$$

$$= \text{vector } AB + \text{vector } CD.$$

Ta thấy VP=VT $\rightarrow$ đpcm.

Cách 4: Chuyển vế 2 vector từ vế phải sang vế trái.

G4 $\text{vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB.$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CD - \text{vector } AD - \text{vector } CB = \text{vector } O.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB - \text{vector } AD + \text{vector } CD - \text{vector } CB = \text{vector } O.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } BD + \text{vector } DB = \text{vector } O.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } O = \text{vector } O \text{ (hiển nhiên).}$$

Vậy điều phải chứng minh là đúng. **C3**

Cách 5: Chuyển 1 vector từ VP sang VT (chuyển AD).

G5 $\text{Vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB .$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CD - \text{vector } AD = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CD + \text{vector } DA = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CA = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } CA + \text{vector } AB = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } CB = \text{vector } CB (\text{hiển nhiên}).$$

Vậy điều phải chứng minh là đúng. **C4**

Cách 6: Chuyển 1 vector từ VT sang VP (chuyển vector AD).

$$\text{G6=G5} \quad \text{Vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB .$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CD - \text{vector } AD = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } DA + \text{vector } CD = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CD + \text{vector } DA = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB + \text{vector } CA = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } CA + \text{vector } AB = \text{vector } CB.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } CB = \text{vector } CB (\text{hiển nhiên}).$$

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

Cách 7: Chuyển đồng thời 1 vector từ VT sang VP và 1 vector từ VP sang VT.

$$\text{G7=G4} \quad \text{Vector } AB + \text{vector } CD = \text{vector } AD + \text{vector } CB .$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } AB - \text{vector } AD = \text{vector } CB - \text{vector } CD.$$

$$\Leftrightarrow \text{vector } DB = \text{vector } DB (\text{hiển nhiên}).$$

Vậy điều phải chứng minh là đúng.

11. Phạm Tuấn Nghĩa - Nam Định

11G/6C

C1: Chuyển 1 vector sang trái, một vector sang phải, sẽ được hai vế là hiệu của hai vector có chung hai điểm cuối hay tổng của hai vector có chung điểm đầu và điểm cuối

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} (1)$$

$$G1 \quad (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} (dpcm) \quad C1$$

$$G2 \quad (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \quad C2$$

C2: Chuyển một vector sang phải hoặc trái, nhóm theo kiểu tổng hai vector có điểm đầu và cuối giống vector về còn lại

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} (1)$$

$$G3=G2 \quad (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$$

$$G4=G2 \quad (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$$

C3: Phân tích một vế thành hai vector còn lại

Chỉ phân tích một trong 4 vector ở hai vế

$$G5 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} (dpcm) \quad C3$$

Phân tích cả 2 vector ở một vế

$$G6=G5 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

C4: Chuyển hai vector sang trái biến đổi thành vector không

$$G7=G1 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} (dpcm)$$

C5: Thêm một bất kì O

G8 -Liên quan đến tổng hai vector

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \quad C4$$

G9 -Liên quan đến hiệu hai vector

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \quad C5$$

G10 C6: Thêm bớt vào hai vế một vector

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} (1)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} (dpcm) \quad C6$$

G11 C7: Vẽ hình

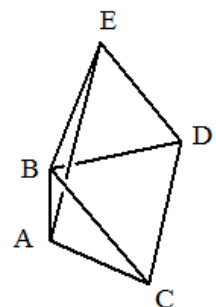
BE //CD và BE = CD **SAI**

Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} (2)$

BEDC là hình bình hành khi đó $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} \rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} (3)$

Từ (2) và (3) $\rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Kết luận: Đây là một bài toán rất hay, có nhiều ý nghĩa trong toán vector. Từ đây ta có thể áp dụng nhiều kiến thức quy tắc tam giác, quy tắc hình bình hành,...



12. Bài Quốc Tuấn - Nam Định

4G/3C

Đề bài:

Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Cách giải 1: G1

Thật vậy, lấy một điểm O tùy ý ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh C1

Cách giải 2: G2

Giả sử: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (điều này luôn luôn đúng). Vậy đẳng thức đã cho luôn đúng $\Rightarrow$ dpcm C2

Cách giải 3: G3

Thật vậy, lấy một điểm O tùy ý ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. C3

Cách giải 4: G4=G2

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$$

Điều này luôn luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh.

13. Nguyễn Thị Thanh Thủy - Nam Định **1G/1C**

G1

Ta có:

$$\begin{aligned}\text{vectoAB} + \text{vectoCD} &= \text{vectoAD} + \text{vectoDB} + \text{vectoCD} + \text{vectoDD} \\ &= \text{vectoAD} + (\text{vectoDB} - \text{vectoDc}) \\ &= \text{vectoAD} + \text{vectoCB} \\ (\text{Đpcm}) \quad \text{C1}\end{aligned}$$

14. Vũ Ngọc Ánh - Quảng Ninh 5G/2C

Họ và tên người dự thi: Vũ Ngọc Ánh

Địa chỉ: Tổ 4- Khu Vĩnh Tuy 1, Thị trấn Mạo Khê, Huyện Đông Triều, tỉnh Quảng Ninh.

Số điện thoại: ...57

* Đề bài: Chứng minh rằng: Với bốn điểm bất kỳ A, B, C và D ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Cách 1: G1

Lấy một điểm O tùy ý, theo quy tắc về hiệu 2 véc tơ, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

So sánh 2 đẳng thức trên ta suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ C1

Cách 2:

G2 +, Dùng quy tắc 3 điểm viết:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad \text{C2}\end{aligned}$$

G3=G2

+, Dùng quy tắc 3 điểm viết:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

Cách 3:

Biến đổi về trái: G4=G2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \text{VP}\end{aligned}$$

Biến đổi về phải: G5=G2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \text{VT}\end{aligned}$$

15. Nguyễn Đức Duy - Hà Nam 9G/5C

Đề bài: Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

G1 Cách 1: Chuyển vế: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ C1

G2 Cách 2: Chuyển vế: $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}$ C2

G3 Cách 3: Xen điểm, biến đổi vế phải:
 $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$ C3

G4=G3 Cách 4: Xen điểm, biến đổi vế phải:
 $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

G5=G3 Cách 5: Xen điểm, biến đổi vế trái:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$

G6=G3 Cách 6: Xen điểm, biến đổi vế trái:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

G7 Cách 7: Xét điểm O tùy ý, ta có:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$ C4

Từ cách 3 đến cách 7 có thể dùng quy tắc trừ 2 vector để chứng minh. Nếu coi như khác nhau thì ta đã có 12 cách, còn nếu coi không khác với 5 cách đó thì ta đã có 7 cách.

G8 Cách 8: Gọi D' thỏa mãn: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{CD}$ thì: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DD'}$

Khi đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AD'}$
 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$ C5

Suy ra đpcm

G9 Cách 9: Gọi D' thỏa mãn: $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{CD}$. Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $I=?$
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AI}$ (Dĩ nhiên vẫn đúng nếu A, B, D' thẳng hàng)

Hiển nhiên: $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{CD}$. Do đó, chứng minh tương tự cách 8 ta được:
 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DI}$

Do đó: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI}$
 Suy ra đpcm

Các cách nói trên (9 cách hoặc 9+5=14 cách) đã sử dụng các phép toán từ đơn giản đến kỹ năng dựng tổng các vector phức tạp hơn. Tương tự cho cách 8 là ta có thể dựng hiệu vector. Nói tóm lại có khá nhiều cách c/m bài toán trên. Trên đây, tác giả chỉ tạm nêu một vài cách tạm gọi là đơn giản, ngoài ra còn có các cách biến đổi phức tạp khác nữa. Vector thật thú vị và cũng khó, phải không?

16. Nguyễn Hoàng Việt - Nam Định **24G/8C**

Họ và tên Nguyễn Việt Hoàng

Địa chỉ 10A3 THPT Trần Hưng Đạo ,TP Nam Định

Số điện thoại: ...36

BÀI LÀM

Đề bài Với 4 điểm A,B,C,D ta luôn có $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ (đã làm 24 cách)

G1 Cách 1 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OD}$

$$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OD} = VT$$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad \text{C1}$$

G2 Cách2 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{AD} + (\vec{CD} + \vec{DB}) = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad \text{C2}$$

G3=G2 Cách3 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CB} + \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

G4 Cách4 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm} \quad \text{C3}$$

G5 Cách5 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AC}(\text{ĐÚNG})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm} \quad \text{C4}$$

G6=G2 Cách6 / $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CB} = \vec{AB} + (\vec{CB} + \vec{BD}) = \vec{AB} + \vec{CD}$

$$\Rightarrow \text{đpcm}$$

G7=G2 Cách7 / $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CD}$

$$\Rightarrow \text{đpcm}$$

G8=G4 Cách8 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{AD} - \vec{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{CB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} + \vec{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{DD} = \vec{0}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

G9 Cách9 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CB} = \vec{CB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm} \quad \text{C5}$$

G10 Cách10 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DD} = \vec{AC} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AB}(\text{đúng})$ **C6**

G11=G10 Cách11 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BC}$
 $\Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{BB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD}(\text{đúng})$

G12=G9 Cách12 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$
 $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD}(\text{đúng})$
 $\Leftrightarrow \text{đpcm}$

G13=G9 Cách13 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} - \vec{AB} - \vec{CD}$
 $\Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AB}) + (\vec{CD} - \vec{CD}) = (\vec{AD} - \vec{AB}) + (\vec{CB} - \vec{CD})$
 $\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BD} + \vec{DB}$
 $\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BB}(\text{đúng})$
 $\Leftrightarrow \text{đpcm}$

G14=G8 Cách14 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ Sau khi chen thêm vecto MN, ta thu được dạng thức ban đầu!!!
 $\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{NB} + \vec{CD} = \vec{ND} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{NB} - \vec{ND} = \vec{CB} - \vec{CD}$
 $\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng } \vec{0})$
 $\Leftrightarrow \text{đpcm}$

Cách15 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G15=G14, khi N=M**
 $\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{MD} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{MD} + \vec{CB}$
 $\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{CB} - \vec{CD}$
 $\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$
 $\Leftrightarrow \text{đpcm}$

Cách16 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G16=G14**
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CM} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{CM} + \vec{MB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{MB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{MB} - \vec{MD}$
 $\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$
 $\Leftrightarrow \text{đpcm}$

Cách17 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G17**

$$\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{ND} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND} + \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{NB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{ND} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{ND}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm} \quad \text{C7}$$

Cách18 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G18=G14**

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{CD} = \vec{MD} - \vec{MA} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{MD} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Cách19 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G19=G18**

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + (\vec{ND} - \vec{NC}) = \vec{AD} + (\vec{NB} - \vec{NC})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{ND} - \vec{NC} = \vec{AD} + \vec{NB} - \vec{NC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{ND} = \vec{AD} + \vec{NB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{NB} - \vec{ND}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

G20 Cách20 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MD} - \vec{MC} = \vec{MD} - \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MD} - \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} - \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm} \quad \text{C8}$$

Cách21 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G21=G20, việc thêm điểm N không cần thiết**

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NC} = \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NC} = \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NC}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Cách22 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G22=G18, việc thêm điểm N không cần thiết**

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{CD} = \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NA} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} + \vec{CD} = \vec{MD} + \vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Cách23 / $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ **G23=G22**

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{MD} - \vec{MN} - \vec{NC} = \vec{AD} + \vec{MB} - \vec{MN} - \vec{NC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{MB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{MB} - \vec{MD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

G24 Cách 24 / $AB + CD = AD + CB$ **G24=G20**

$$\Leftrightarrow (MB - MA) + (ND - NC) = (MD - MA) + (NB - NC)$$

$$\Leftrightarrow MB - MA + ND - NC = MD - MA + NB - NC$$

$$\Leftrightarrow MB + ND = MD + NB$$

$$\Leftrightarrow MB - MD = NB - ND$$

$$\Leftrightarrow DB = DB(\text{đúng})$$

$$\Leftrightarrow \text{đpcm}$$

G1

Cách 1:

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$C: \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0}$$

$$C: \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

$$C: \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

$$C: \vec{0} = \vec{0} \quad C1$$

G2

Cách 2: $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$C: \vec{CB} = \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{AB}$$

$$C: \vec{BD} = \vec{BD} \quad C2$$

G3

Cách 3: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD}$

$$\text{đổi vị trí} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad (\text{đpcm}) \quad C3$$

G4=G3

Cách 5: Biến đổi vế phải

$$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB}$$

$$= \vec{AB} + \vec{CD} \quad (\text{đpcm})$$

Cách 6: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

$$C: \vec{CB} = \vec{CB} = \vec{AD} - \vec{AB}$$

G5=G3

$$\begin{aligned} \vec{AD} & \left| \begin{array}{l} \text{Cách 1} \\ \text{Cách 2} \end{array} \right. \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{CD} \\ & = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CA} + \vec{AD} \\ & = \vec{CB} + \vec{AD} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{CB} + \vec{AD} + \vec{DB}$$

$$\begin{aligned} \text{Ch 1: } \vec{AB} + \vec{CD} &= \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CD} + \vec{DB} \\ &= \vec{AD} + \vec{CB} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Coi 1: } \\ \text{Coi 2: } \end{array} \right.$$

Ch 5: Bối cảnh và các bài toán

$$\begin{aligned} \vec{AD} + \vec{CB} &= \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB} \\ &= \vec{AB} + \vec{CD} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

G6=G3

$$\text{Ch 6: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\text{Ch 7: } \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DB}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{đpcm}$$

G7

$$\text{Ch 7: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\text{Ch 8: } \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB} \quad \text{C4}$$

G8=G7

$$\text{Ch 8: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\text{Ch 9: } \vec{AB} + \vec{DB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CD}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CB}$$

G9=G7

$$\text{Ch 9: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\text{Ch 10: } \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BE}$$

$$\Rightarrow \vec{AE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CE}$$

$$C \rightarrow \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{AD} + \vec{AD}$$

$$C \rightarrow \vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0}$$

$$C \rightarrow \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\text{Cạnh 7: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$C \rightarrow \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{BD}$$

$$C \rightarrow \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CD}$$

$$\text{Cạnh 8: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$C \rightarrow \vec{AB} + \vec{DE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{CD}$$

$$C \rightarrow \vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CB}$$

$$\text{Cạnh 9: } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$C \rightarrow \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{DE}$$

$$C \rightarrow \vec{AE} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CE}$$

$$C \rightarrow \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

$$C \rightarrow \vec{AC} = \vec{AC} \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{Cạnh 10: } \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DM} = \vec{AD} + \vec{DM} + \vec{CB}$$

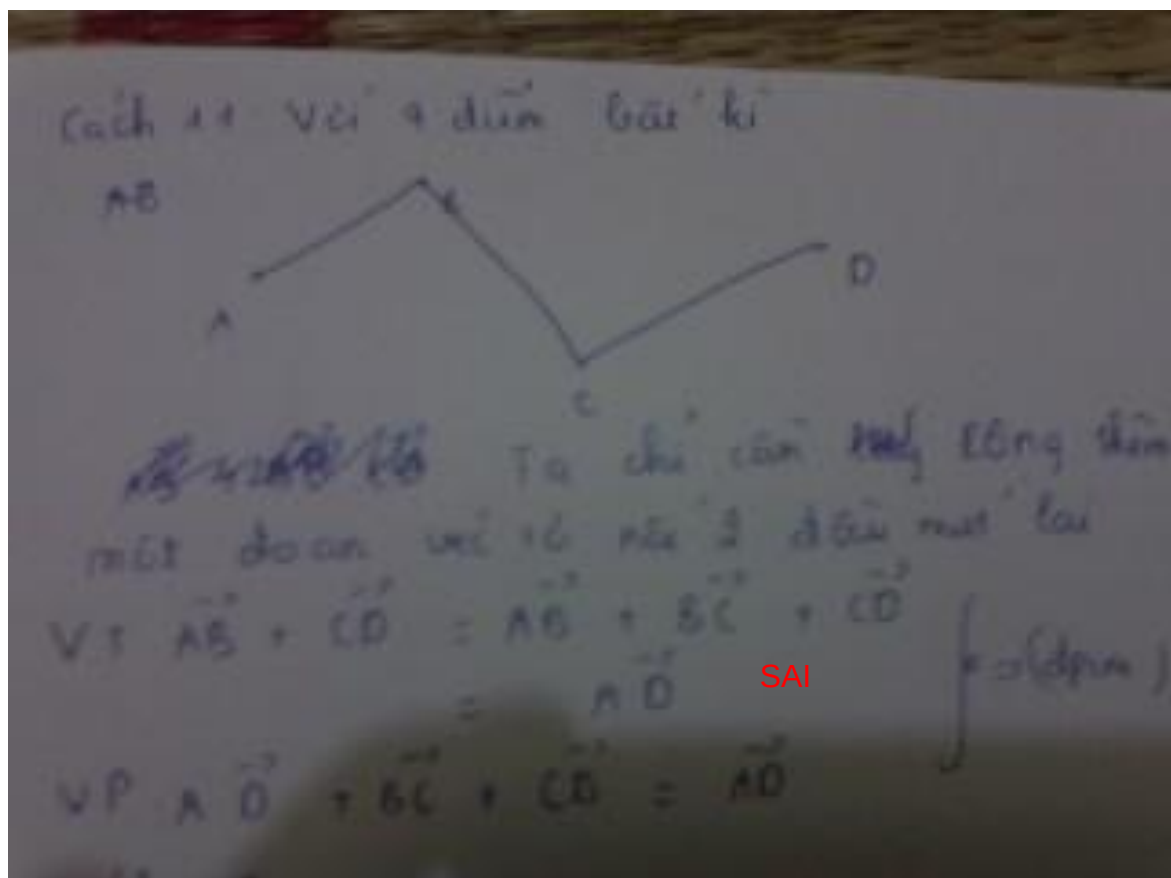
$$C \rightarrow \vec{AB} + \vec{CM} = \vec{AM} + \vec{CB}$$

$$C \rightarrow \vec{CM} + \vec{MA} = \vec{CA} + \vec{CA}$$

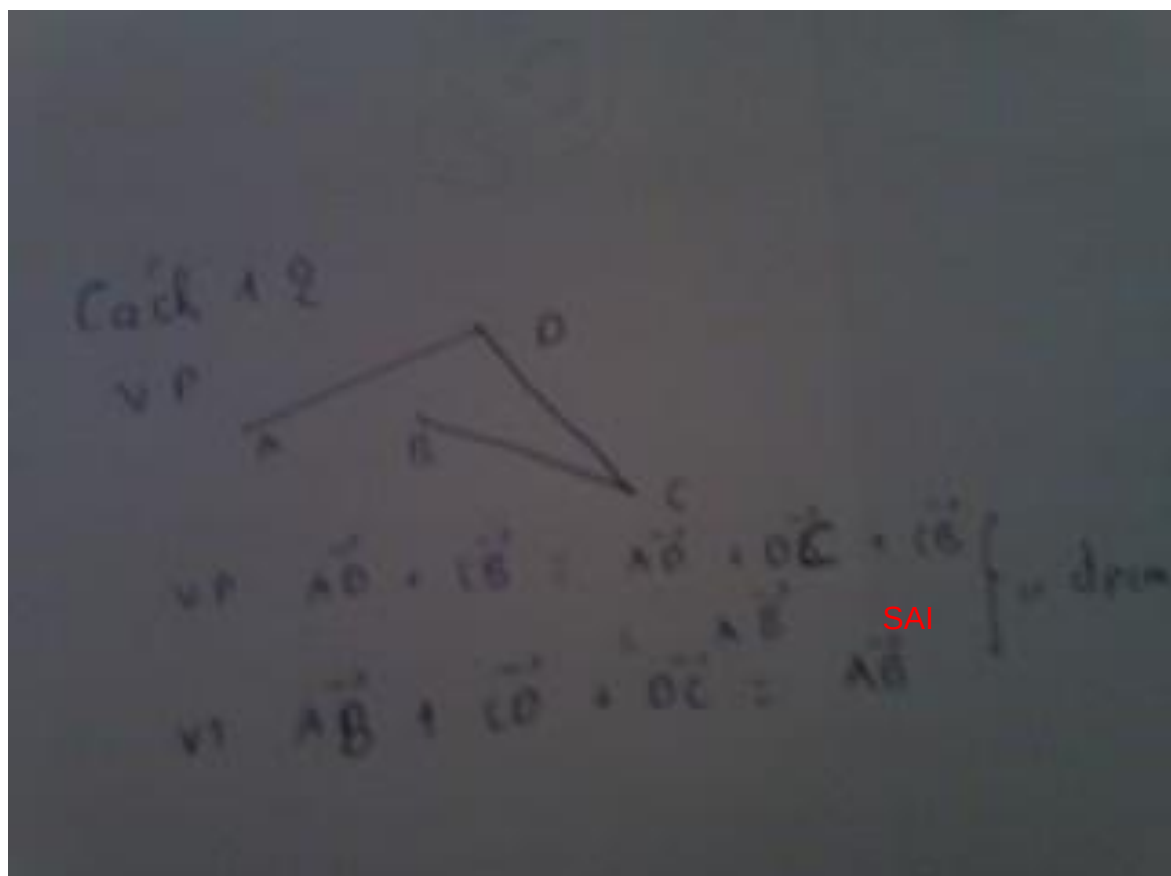
$$C \rightarrow \vec{CA} = \vec{CA} \quad (\text{đpcm})$$

G10=G7

G11



G12=G7



18. Trần Xuân Đắc - Nam Định 4G/3C

BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN VECTƠ BẰNG NHIỀU CÁCH

Họ tên người dự thi: Trần Xuân Đắc

Địa chỉ: Thôn Xương Xã Bình Minh Huyện Nam Trực

Ninh Nam Định

Số điện thoại: [REDACTED]

Bài làm

G1

Cách 1

$$\begin{aligned} \text{V.T. } \vec{AB} + \vec{CD} &= \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AD} + \vec{CB} + (\vec{DB} + \vec{BD}) \\ &= \vec{AD} + \vec{CB} = \text{VP} \end{aligned}$$

Vậy $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ C1

G2

Cách 2

$$\begin{aligned} \text{V.T. } \vec{AB} + \vec{CD} &= \vec{AB} + \vec{DB} - \vec{DB} + \vec{BD} - \vec{BD} + \vec{DC} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BD}) - \vec{DB} - \vec{BD} + \vec{DC} \\ &= \vec{AD} + \vec{CB} = \text{VP} \end{aligned}$$

Vậy $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ C2

G3

Cách 3

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB} \\ \vec{CB} - \vec{CD} = \vec{DB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$

hay $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ C3

G4

Cách 4.

KHÔNG HỢP LỆ

$$\text{Gọi: } A(x_A; y_A)$$

$$B(x_B; y_B)$$

$$C(x_C; y_C)$$

$$D(x_D; y_D)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C; y_D - y_C)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A)$$

$$\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C; y_B - y_C)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_B - x_A + x_D - x_C; y_B - y_A + y_D - y_C) \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (x_D - x_A + x_B - x_C; y_D - y_A + y_B - y_C) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_B - x_A + x_D - x_C; y_B - y_A + y_D - y_C) \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (x_D - x_A + x_B - x_C; y_D - y_A + y_B - y_C) \end{array} \right.$$

$$\text{hay } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_D - x_A + x_B - x_C; y_D - y_A + y_B - y_C) \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (x_D - x_A + x_B - x_C; y_D - y_A + y_B - y_C) \end{array} \right.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$