Phương trình lượng giác khác

*Dẫn nhập: Ngoài các PTLG đã biết cách giải như PTLG cơ bản và PTLG thường gặp, còn rất nhiều PTLG khác - những phương trình loại này rất đa dạng và không có một phương pháp chung nào để giải chúng. Muốn giải được, đòi hỏi ta phải vận dụng linh hoạt các **nguyên tắc biến đổi lượng giác**, để biến đổi phương trình đã cho trở **thành các phương trình đã biết** giải hoặc **thành phương trình tích**.*

I. NĂM NGUYÊN TẮC BIẾN ĐỔI

1. Đưa về cùng một góc/cung

Nếu trong phương trình có các hàm số của các cung khác nhau thì ta tìm cách đưa về cùng một cung.

Ví dụ 1 (KD-2008). Giải phương trình: $2\sin x\,(1+\cos 2x)+\sin 2x = 1+2\cos x$

Nhận xét: Trong pt có 2 cung x và 2x, nên ta tìm cách chuyển cung 2x về cung x

Giải

$PT \Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1+2\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\,(2\cos x+1) = 2\cos x+1$

$$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+m2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\ (k,m\in\mathbb{Z})$$

Ví dụ 2 (KA-2008). Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$

Nhận xét: Trong pt có 3 cung $x; x-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}-x$ nên ta tìm cách chuyển ba cung này về cùng một cung.

Giải

* $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\pi\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

* $\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left[2\pi-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

* Điều kiện: $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq 0$

* $PT \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x+\cos x) \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(\sqrt{2}\sin 2x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x = 0\ (tm)\\ \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ (tm)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\tan x=-1\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi; x=-\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=-\frac{\pi}{4}+m\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi; x=-\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.\ (k,m\in\mathbb{Z})$$

2. Đưa về cùng một hàm số lượng giác

Nếu các hàm số lượng giác có thể cùng biểu diễn qua được một hàm lượng giác thì ta đưa phương trình đã cho về hàm chung đó rồi đặt ẩn phụ.

Ví dụ 3 (Dự bị KB-2003). Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

Nhận xét: Có thể biểu diễn hàm $\cos 4x$ thành $\cos 2x$ hoặc $\cos x$. Hàm $\cos^2 x$ có thể biểu diễn thành $\cos 2x$ và $\cos^6 x$ có thể biểu diễn qua $\cos^2 x$. Do đó ta sẽ đưa phương trình về dạng một hàm số $\cos 2x$ hoặc $\cos x$. Ta sẽ đưa về hàm nào?

Giải

$*Pt \Leftrightarrow 3(2\cos^2 2x-1)-(2\cos^2 x)^3+1+\cos 2x+3=0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos^2 2x-3\cos 2x+2)=0$

$$*\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\cos 2x=0\\ \cos 2x=1\\ \cos 2x = 2\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=m\pi\end{array}\right.\ (k,m\in\mathbb{Z})$$

3. Biến đổi tích thành tổng và ngược lại

Trong phương trình xuất hiện tích của các hàm số lượng giác sin và cos mà không có thừa số chung thì ta có thể biến đổi thành tổng để tạo ra những đại lượng giống nhau và rút gọn. Nếu xuất hiện tổng thì ta biến đổi về tích để làm xuất hiện thừa số chung... Đặc biệt là ta nên ghép những ***cặp có tổng hoặc hiệu hai cung bằng nhau***.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sin 2x\cos 3x = \sin 5x\,.\cos 6x$

Giải

$$*PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 5x-\sin x]=\frac{1}{2}[\sin 11x-\sin x] \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 11x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Giải

$*PT \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x$

$*\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x\,(2\cos x + 1) = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$

$*\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2} \\ \tan 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2}\end{array}\right. \ (k, m \in \mathbb{Z})$

4. Hạ bậc

Khi giải phương trình lượng giác ta thường phải sử dụng các công thức biến đổi lượng giác. Tuy nhiên, hầu hết các công thức này chỉ áp dụng cho các hàm số lượng giác có số mũ bằng 1. Hơn nữa, cần nhớ rằng hạ bậc giúp ta triệt tiêu hằng số. Do đó, nếu phương trình có ***số mũ của các hàm lượng giác là chẵn*** *thì ta có thể hạ bậc để thuận tiện cho việc biến đổi.*

Ví dụ 6 (KB-2002). Giải phương trình: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

Giải

$*PT \Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2} \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$

$*\Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 11x \cos x \Leftrightarrow \cos x\,(\cos 11x - \cos 7x) = 0$

$*\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\cos x = 0 \\ \cos 11x = \cos 7x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{m\pi}{2}; x = \frac{m\pi}{9}\end{array}\right. \ (k, m \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 7 (KA-2005). Giải phương trình: $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

Giải

$*PT \Leftrightarrow (1 + \cos 6x)\cos 2x - 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$

$*\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Bình luận: *$\cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$ thực chất là dạng $0.\sin u + \cos u + 0.\sin 2u + \cos 2u = 2$, do đó đưa được về dạng tích*

5. Chuyển hai hàm tan và cot về hai hàm sin và cos

Nếu trong phương trình ***chứa tan, cot và cả sin, cos*** thì ta thay tan, cot bởi sin và cos, lúc đó chúng ta dễ dàng tìm được lời giải hơn. Chú ý khi gặp phương trình chứa tan hay cot thì ***NHỚ đặt điều kiện*** cho phương trình.

Ví dụ 8 (KB-2004). Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$*PT \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

$*\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$*\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (tmđk) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 9 (KD-2003). Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$*PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$

$*\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0\ (*)$

$*\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \text{ (tm)} \\ \tan x = 1 \text{ (tm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + m\pi\end{array}\right. \ (k, m \in \mathbb{Z})$

Bình luận: *Có thể xem phương trình (*) là một trường hợp của dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$*

II. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG THƯỜNG GẶP

Đưa phương trình ban đầu về phương trình lượng giác thường gặp như: Bậc 2-3 với một hàm số lượng giác; Bậc nhất 2 hàm sin và cos; Đẳng cấp,…

Ví dụ 1 (CĐ-2011). Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

Giải

Nhận xét: Cả hai hàm số $\cos 4x$ và $\sin^2 x$ đều có thể biểu diễn qua hàm $\cos 2x$ nên ta nghĩ đến quy phương trình về 1 hàm $\cos 2x$

*PT $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + 6(1-\cos 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0$

*$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 2 \text{ (vô nghiệm)}\\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 2 (KD-2009). Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$

Giải

*PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x$

*$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3} - 5x = x + 2k\pi\\ \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 3 (HVBCVT TP.HCM – 2001). Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$

Giải

Nhận xét: Trong phương trình xuất hiện các hàm với số mũ chẵn nên ta nghĩ đến việc hạ bậc

* Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

* PT $\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi\end{array}\right.$

Ví dụ 4 (KB-2012). Giải phương trình: $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$

Giải

* $PT \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

* $\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

* $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi\\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\\ x = \frac{k2\pi}{3}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

***Bình luận:** Phương trình đã cho có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$. Do đó có thể đưa được về dạng tích.*

Ví dụ 5 (ĐH Công Đoàn – 2000). Giải phương trình: $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

*PT $\Leftrightarrow 1 + 3.\frac{\sin x}{\cos x} = 4\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x + 3\sin x = 4\sin x\cos^2 x$

*Nhận xét: Các số hạng trong phương trình **<u>đều có số mũ lẻ</u>** nên đây là phương trình đẳng cấp bậc ba. Do đó chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ (do $\cos x \neq 0$), ta có:*

*$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\tan x}{\cos^2 x} = 4\tan x \Leftrightarrow 1 + \tan^2 x + 3\tan x(1 + \tan^2 x) = 4\tan x$

*$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$ (tmđk) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

*Nhận xét: * Ta đã sử dụng 2 nguyên tắc "tan thành sin, cos và đưa về cùng góc x"*

** Ngay từ đầu, ta có thể chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ hoặc sử dụng công thức $\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ và chuyển phương trình ban đầu về phương trình chỉ chứa hàm tan như trên.*

III. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG TÍCH

Khi gặp phương trình lượng giác có chứa nhiều hàm lượng giác thì điểm mấu chốt là phải tìm được nhân tử chung. Sau đó sử dụng các phép biến đổi lượng giác thích hợp để làm xuất hiện các thừa số chung trong từng số hạng của phương trình và đưa phương trình về dạng tích. Làm thế nào "phát hiện ra" nhân tử chung? Có 2 cách, cách thứ nhất là vận dụng thành thạo bảng các họ nhân tử chung thường gặp.

III.1. Họ các biểu thức có nhân tử chung thường gặp

Dưới đây là các biểu thức có thừa số chung hay gặp

Họ biểu thức	Nhân tử chung
$1+\sin 2x$; $\cos 2x$; $1+\tan x$; $1+\cot x$; $\tan x-\cot x$; $\cot 2x$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin x+\cos x$
$1-\sin 2x$; $\cos 2x$; $1-\tan x$; $1-\cot x$; $\tan x-\cot x$; $\cot 2x$; $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos x-\sin x$
$\sin 2x$; $1-\cos 2x$; $\tan x$; $\tan 2x$; $\cos 3x-\cos x$; $1-\cos^2 x$	$\sin x$
$\sin 2x$; $1+\cos 2x$; $\cot x$; $\tan 2x$; $\cos 3x+\cos x$; $1-\sin^2 x$	$\cos x$
$1-\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $\sin^3 x$; $1\pm\cos^3 x$; $\tan^2 x$; $\cos 2x\pm\cos x$	$(1-\cos x)(1+\cos x)$
$1-\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$; $1\pm\sin^3 x$; $\cot^2 x$; $\cos 2x\pm\sin x$	$(1-\sin x)(1+\sin x)$

Đặc biệt: Bộ 3 số $\{1; \sin 2x\,; \cos 2x\}$ luôn có thể đưa về dạng tích, với nhiều cách ghép. Chẳng hạn:

- $1\pm\sin 2x$; $\cos 2x$ có thừa số chung là $\sin x\pm\cos x$
- $1+\cos 2x$; $\sin 2x$ có thừa số chung là $\cos x$
- $1-\cos 2x$; $\sin 2x$ có thừa số chung là $\sin x$

*Dựa vào bảng trên, khi giải phương trình lượng giác ta **nên quan sát kĩ** các số hạng, rồi tìm và ghép các số hạng, tạo ra các cặp có nhân tử chung. Từ đó biến đổi để đưa phương trình về dạng tích. Sau đây ta xét một số dạng "dễ thấy" nhân tử chung.*

Một số nguyên tắc đưa phương trình về dạng tích:

** Biến đổi số hạng tự do trước. Số hạng là tích để sau*

** Quy về cùng góc nếu được*

** Quy về một hàm nếu được*

** Nếu chỉ có 2 hàm của cùng một góc thì coi hàm này là biến (hàm có bậc cao hơn), hàm kia là tham số.*

III.2. Một số dạng dễ thấy nhân tử chung

①. Dạng $a.\sin x+b.\cos x+c.\sin 2x+d.\cos 2x=e$

Phân tích:

* Phương trình có chứa hai cung 2x và x, nên ta sẽ đưa các cung 2x về cung x. Vấn đề là sử dụng công thức nào cho cos 2x trong 3 công thức. Sử dụng công thức nào là tùy thuộc vào đặc thù của mỗi phương trình. Ở đây, ta sử dụng 1 trong 2 công thức, hoặc là $2\cos^2 x-1$ hoặc là $1-2\sin^2 x$, để quy về phương trình một hàm số lượng giác, còn hàm số còn lại xem như là tham số:

$$\Leftrightarrow 2d.\cos^2 x+(2c.\sin x+b).\cos x-d-e=0$$

$$\Leftrightarrow 2d.\sin^2 x-(2c.\cos x+a).\sin x-d+e=0$$

* Đến đây, tính Δ là xong. Nếu $\Delta<0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm (Chẳng có gì để kiểm tra với một phương trình vô nghiệm -:D). Nếu $\Delta\geq 0$ thì phương trình có thể đưa về dạng tích.

* Do bậc cao nhất của phương trình là 2 và có chứa hai hàm số sin và cos của cùng một góc nên phương trình đã cho còn được gọi là **"Phương trình bậc hai với hai hàm sin và cos"**

* **Chú ý:**

- Trong thực hành ta thường viết dưới dạng sau cho tiện phân tích nhân tử chung:

$$\Leftrightarrow [2d.\cos^2 x+b.\cos x-d-e]+(2c.\cos x+a).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow [2d.\sin^2 x-a.\sin x-d+e]-(2c.\sin x+b).\cos x=0$$

- Nếu phương trình có nhân tử chung thì ***thường là*** hoặc $\boxed{2c.\cos x+a}$ hoặc $\boxed{2c.\sin x+b}$ $(c\neq 0)$ (Tại sao à? Thích thì cứ tìm hiểu, tại sao! -:D). Do đó, trong thực hành ta không cần tính Δ mà chỉ cần "nhẩm nghiệm" cho 2 trường hợp trên. Từ đó suy ra hướng biến đổi theo hàm cos hay sin tương ứng. Chú ý, chỉ "thường là" thôi nhé, không tin thì thử áp dụng **"lý thuyết"** này với đề thi **KA-2009!!!**

Ví dụ 1 (KD-2010). Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

Gợi ý: *Nhân tử chung là $2\sin x - 1$ hoặc $2\cos x + 3$*

Giải

* PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x - (1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - 1 = 0$

* $\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x + (2\sin^2 x + 3\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$

* $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

* $\sin x + \cos x = -2$ vô nghiệm

Phương trình đã cho có nghiệm: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 2 (KD-2004). Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

Gợi ý: *Vế trái là tích của hai thừa số nên ta không biến đổi vế trái.*

Giải

* PT $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = (2\cos x - 1)\sin x \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

* $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

* $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

* Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 3 (KD-2011). Giải phương trình: $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

Gợi ý:

* *Tử số có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$. Do đó, nhân tử là $2\sin x + 2 = 2(\sin x + 1)$ hoặc $2\cos x - 1$*

* *$\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x(\sin x + 1)$. Do đó, tử số có dạng tích $(\sin x + 1)(\dots)$*

Giải

* Điều kiện: $\cos x \neq 0, \tan x \neq -\sqrt{3}$

* PT $\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

* $\sin x = -1$ (loại, vì làm $\cos x = 0$)

* $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ (tm) \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi\ \left(\text{loại, vì làm } \tan x = -\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 4 (KB-2005). Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Gợi ý:

* *Phương trình có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$ nên nhân tử chung là $2\sin x + 1$ hoặc $2\cos x + 1$*

* *Mặt khác: $\sin x + \cos x$, $1 + \sin 2x$, $\cos 2x$ cùng có nhân tử là $\sin x + \cos x$ nên phương trình có ntc là $\sin x + \cos x$*

Giải

*PT $\Leftrightarrow (1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

*$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

*$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi \end{array}\right. (k, m \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 5 (KB-2012). Giải phương trình: $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$

Gợi ý: *(Xem lại bài hôm trước)*

** Phương trình có thể quy về dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$. Nhân tử chung là $2\sqrt{3}\sin x - 1$ hoặc $2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$*

** Ngoài ra, chúng ta có thể đưa về dạng thường gặp.*

Ví dụ 6 (KA-2009). Giải phương trình: $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$

Gợi ý:

** Sau khi nhân chéo và rút gọn, ta được $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$. Nhân tử chung là $2\sin x - 1$ hoặc $2\cos x + \sqrt{3}$.*

** Ngoài ra, chúng ta có thể đưa về dạng thường gặp.*

Giải

* Điều kiện: $\sin x \neq 1, \sin x \neq -\frac{1}{2}$

* PT $\Leftrightarrow (1 - 2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)$

* $\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

* $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (loại, vì làm $\sin x = 1$), $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\,(tm)$

Phương trình có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 7 (KA-2010). Giải phương trình: $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

Gợi ý:

** Đầu tiên cần quy cung $x + \frac{\pi}{4}$ về cung x, nhờ công thức $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$. Và nhận thấy $1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$ nên ta có thể rút gọn $\sin x + \cos x$ và $\cos x$.*

** Sau khi rút gọn $\sin x + \cos x$ và $\cos x$ thì phương trình có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e, c = 0$.*

Giải

* Điều kiện: $\cos x \neq 0, \tan x + 1 \neq 0$

* PT $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(1 + \sin x + \cos 2x) = \cos x\,(1 + \tan x)$

* $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos 2x) = \sin x + \cos x$

* $\Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1 \text{ (loại, vì làm } \cos x = 0)\\ \sin x = -\frac{1}{2} \text{ (tm)}\end{array}\right.$

* $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Ví dụ 8 (KA-2011). Giải phương trình: $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x\sin 2x$

Gợi ý:

** Sau khi rút gọn $\frac{1}{1+\cot^2 x} = \sin^2 x$, phương trình có dạng $0.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$*

** $\sin 2x$, $1 + \cos 2x$ cùng có nhân tử chung là $\cos x$. Do đó, cả hai vế đều có nhân tử chung là $\cos x$*

Giải

* Điều kiện: $\sin x \neq 0$ (*)

* PT $\Leftrightarrow (1 + \sin 2x + \cos 2x)\sin^2 x = 2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$

* $\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2}\cos x$ (do $\sin x \neq 0$) $\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right) = 0$

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thoả mãn (*)

* $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, thỏa mãn (*)

Vậy, phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bình luận: *Mẫu số $1+cot^2 x$ chỉ là để "gây nhiễu tâm lý", các bạn học sinh hay có tâm lý "ngại" phương trình có chứa mẫu số. Mà quên "tập trung" vào dấu hiệu bản chất là sự có mặt của bộ $\{sin\,2x\,;\,1+cos\,2x\}$.*

Ví dụ 9 (KA-2012). Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

Gợi ý:

***** *Dạng $a.sin\,x+b.cos\,x+c.sin\,2x+d.cos\,2x=e$. Do đó, nhân tử chung là 1 trong 2 biểu thức: $2\sqrt{3}\,sin\,x-2$ hoặc $2\sqrt{3}\,cos\,x$*

* *$\sqrt{3}\,sin\,2x$, $2\,cos\,x$, $cos\,2x+1=2\,cos^2 x$ có nhân tử chung là $cos\,x$*

Giải

* PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+(1+\cos 2x)-2\cos x=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)\cos x=0$

* $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

* $\sqrt{3}\sin x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=k2\pi, x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

* Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=k2\pi, x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Bình luận:

- Hệ số $\sqrt{3}$ trong phương trình trên chỉ là để "gây nhiễu tâm lý", tâm lý nhiều bạn nhìn thấy "căn" là "sờ sợ". Thực chất, nhân tử chung trong phương trình trên không phụ thuộc vào con số "căn ba" đó, chẳng hạn, nếu bạn thay số $\sqrt{3}$ bởi các con số khác như $\sqrt{2}$ hay $2,\ldots$ thì nhân tử chung vẫn là $cos\,x$. Tại sao?

- Vì nhân tử chung được sinh ra từ bộ 4 số hạng $\{sin\,2x\,;\,1+cos\,2x\,,cos\,x\}$ nên nếu có hệ số đi kèm với 1 trong 4 số hạng này thì đều không hề ảnh hưởng gì. Ví dụ nếu phương trình chứa bộ 4 số hạng $\{\sqrt{2013}.\,sin\,2x\,;\,1+cos\,2x\,,2012.\,cos\,x\}$ thì nhân tử chung vẫn là $cos\,x$.

②. Dạng $a.\tan x+b.\cot x+a.\sin x+b.\cos x+a+b=0$

Phân tích:

* Vì phương trình có chứa hàm tan, cot và cả sin, cos nên ta phải đặt điều kiện, rồi thay tan và cot bằng sin và cos

$$\frac{a.\sin x}{\cos x}+\frac{b.\cos x}{\sin x}+a.\sin x+b.\cos x+a+b=0$$

* Lúc này, quan sát phương trình ta thấy cặp $\frac{a.\sin x}{\cos x}+b$, $a+\frac{b.\cos x}{\sin x}$ và $a.\sin x+b.\cos x$ có nhân tử chung là $a.\sin x+b.\cos x$. Do đó phương trình đưa được về dạng tích.

<u>Cách giải:</u>

* Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

* PT $\Leftrightarrow \left(\frac{a.\sin x}{\cos x}+b\right)+\left(a+\frac{b.\cos x}{\sin x}\right)+(a.\sin x+b.\cos x)=0$

*$\Leftrightarrow (a.\sin x+b.\cos x)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+1\right)=0$

*$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a.\sin x+b.\cos x=0\\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0\end{array}\right.$ (Giải được)

Ví dụ 1. Giải phương trình sau: $\sin x+2\cos x+2\tan x+4\cot x+6=0$

Giải

* Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

Nhận xét: Thừa số chung là $sin\,x+2\,cos\,x$. Do đó, cần có $tan\,x+2$ và $2\,cot\,x+1$

* PT $\Leftrightarrow (\sin x+2\cos x)+2(\tan x+2)+2(2\cot x+1)=0$

*$\Leftrightarrow (\sin x+2\cos x)+2\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}+2\frac{2\cos x+\sin x}{\sin x}=0$

*$\Leftrightarrow (\sin x+2\cos x)\left(1+\frac{2}{\sin x}+\frac{2}{\cos x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin x+2\cos x=0\\ 2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=0\end{array}\right.$

* Với $\sin x+2\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=-2 \Leftrightarrow x=\arctan(-2)+k\pi$

*Với $2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=0$

- Đặt $t = \sin x + \cos x \ \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Có

$$2t + \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 + \sqrt{5}\ (tm) \\ t = -2 - \sqrt{5} (loại) \end{array}\right.$$

- Với $t = -2 + \sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = -2 + \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + m2\pi$

* Đáp số: $x = \arctan(-2) + k\pi; x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + m2\pi\ (k, m \in \mathbb{Z})$

③. Dạng $F(1 \pm \cos x, \sin^2 x, \tan^2 x, 1 \pm \cos^3 x) = 0$

Nhân tử chung: $1 \pm \cos x$. Vì sao?

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\tan^2 x\,(1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0$

Phân tích:

* Do phương trình có chứa cả hàm tan, sin và cos nên đầu tiên ta phải đặt điều kiện, rồi thay tan bằng sin và cos

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sin^2 x\,(1 - \sin^3 x) + (\cos^3 x - 1)\cos^2 x = 0$$

* Lúc này mỗi số hạng đều là tích của hai nhân tử nên ta chưa vội khai triển và quan sát kĩ thì thấy: cặp $\sin^2 x$ và $\cos^3 x - 1$ có thừa số chung là $1 - \cos x$; còn cặp $1 - \sin^3 x$ và $\cos^2 x$ thì có thừa số chung là $1 - \sin x$. Do đó phương trình đưa được về dạng tích.

Giải

* Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

* PT $\Leftrightarrow \sin^2 x\,(1 - \sin^3 x) + (\cos^3 x - 1)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) - (1 - \cos^3 x)(1 - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0\ (tm) \\ 1 - \sin x = 0\ (\text{loại, vì làm } \cos x = 0) \\ \sin x - \cos x = 0\ (tm) \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0\ (tm) \end{array}\right.$$

* $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

* $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\pi$

* Giải: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0$

- Đặt $t = \sin x + \cos x \ \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Có

$$t + \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 - \sqrt{2}\ (\text{loại}) \\ t = -1 + \sqrt{2}\ (\text{tm}) \end{array}\right.$$

- Với $t = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + l2\pi$

* Đáp số: $k2\pi; \frac{\pi}{4} + m\pi; \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + l2\pi\ \ (k, m, l \in \mathbb{Z})$

④. Dạng $F(1 \pm \sin x, \cos^2 x, \cot^2 x, 1 \pm \sin^3 x) = 0$

Nhân tử chung: $1 \pm \sin x$. Vì sao?

Ví dụ 3. Giải phương trình: $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

Phân tích:

* Quan sát phương trình, thấy ngay rằng 3 số hạng trong phương trình chưa có mối quan hệ gì. Nên ta sẽ cần biến đổi, và hiển nhiên ta sẽ biến đổi số hạng cos 2x chứ không phải 2 số hạng kia.

* Nhưng vấn đề, sử dụng công thức nào trong 3 công thức cho cos 2x: $\cos^2 x - \sin^2 x, 2\cos^2 x - 1, 1 - 2\sin^2 x$? Hãy thử từng trường hợp một xem sao:

- Với $2\cos^3 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x$, thì được $\cos^2 x\,(2\cos x + 1) - \sin x\,(1 - \sin x) = (1 - \sin x)(\dots)$
- Với $2\cos^3 x + (2\cos^2 x - 1) + \sin x$, thì cặp $2\cos^2 x\,(1 + \cos x)$ và $\sin x - 1$ có thừa số chung là $\sin x - 1$.
- Với $2\cos^3 x + (1 - 2\sin^2 x) + \sin x$, thì được $2\cos^3 x - \left(2\sin^2 x - \sin x - 1\right) = 2\cos^3 x - (\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

Giải

* PT $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x\,(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x)(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$

* $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

* $2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1 = 0$

- Đặt $t = \sin x + \cos x \ \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Có

$$2t + 2\frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0\ (tm) \\ t = -2\ (loại) \end{array}\right.$$

- Với $t = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + m\pi$

* Đáp số: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + m\pi\ (k, m \in \mathbb{Z})$

<u>Tổng kết bài học:</u> *Như vậy bài học này thày nêu cho các em 4 dạng mà có thể đưa về dạng tích. Khi giải phương trình lượng giác, mà trong phương trình có chứa nhiều hàm lượng giác thì điểm mấu chốt là chúng ta phải tìm được nhân tử chung. Và sử dụng phép lượng giác thích hợp để làm xuất hiện nhân tử chung trong từng số hạng của phương trình. Sau đó biến đổi phương trình về dạng tích rồi cho từng thừa số bằng không, giải tuyển các phương trình lượng giác tương ứng, tìm nghiệm thỏa mãn tập xác định của phương trình.*

Bài tập tự luyện

Bài 1 (ĐH-Ngoại Thương). Giải phương trình: $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

Gợi ý: *Nhân tử chung là một trong hai biểu thức: $-6\sin x + 6 = -6(\sin x - 1)$ hoặc $-6\cos x + 9$*

Giải

PT $\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$

$\Leftrightarrow 6\cos x\,(1 - \sin x) - (2\sin^2 x - 9\sin x + 7) = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x\,(1 - \sin x) - (\sin x - 1)(2\sin x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[6\cos x + (2\sin x - 7)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(2\sin x + 6\cos x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ 2\sin x + 6\cos x = 7\ (vô\ nghiệm) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bình luận: *Nếu ta sử dụng $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ thì phương trình sẽ như thế nào?*

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin x + \cos x - 1} = 1$

Phân tích:

* Điều kiện: $\sin x + \cos x \ne 1$

* Nhìn thấy ngay, phương trình có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$

* Trước tiên cần trục mẫu số, ta có: PT $\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = \sin x + \cos x - 1$. Do đó, nhân tử chung chỉ có thể là 1 trong 2 biểu thức: $2\sin x - 1$ hoặc $2\cos x - 1$

* Nhận xét rằng: $\cos 2x$, $\sin x + \cos x$ có thừa số chung là $\sin x + \cos x$. Do đó, nếu ta chuyển -1 từ vế phải sang vế trái và ghép với $\sin 2x$ thì được $1 + \sin 2x$ cũng có thừa số chung là $\sin x + \cos x$. Khi đó phương trình sẽ đưa được về dạng tích.

Giải

* Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 1$

* PT $\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = \sin x + \cos x - 1$ (*)

*$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + (1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x) = 0$

*$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1\ (tm) \\ \cos x = \frac{1}{2}\ (tm) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (m, k \in \mathbb{Z})$

Bài 3. Giải phương trình: $\cot x - 3\tan x = (1 - 2\sin x)\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}\right)$

Hướng dẫn:

* PT $\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin^2 x = (1 - 2\sin x)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$

Nhận xét: Phương trình có dạng $a.\sin x + b.\cos x + c.\sin 2x + d.\cos 2x = e$

* Do vế phải là tích của hai thừa số nên ta không vội biến đổi vế phải

$\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 x = (1 - 2\sin x)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow (1 - 2\sin x)\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

* PT có nghiệm: $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + l2\pi\ (ktm)$

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0$

***Gợi ý:** Nhân tử chung là một trong hai biểu thức:*

Giải

* PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(-2\sin^2 x + \cos x\right) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0$

*$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\sin^2 x + 3\sin x + \sqrt{3}\cos x - 2\sin x\cos x = 0$

*$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) - \cos x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$

*$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + m\pi \end{array}\right. \ (k, m \in \mathbb{Z})$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \cos^2 x + \sin^3 x = 0$

Gợi ý: $\cos x + \cos^2 x = \cos x\,(1 + \cos x), \sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$ có nhân tử chung là $1 + \cos x$

Đáp số: $x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + m2\pi\ (k, m \in \mathbb{Z})$. Giải chi tiết xem mục phân loại

b) KB-2011. $\sin 2x\cos x + \sin x\cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$

Gợi ý: Khó nhìn ra nhân tử chung, nên ta nhẩm nghiệm và được nghiệm $\sin x = 1$. Từ đó, suy ra nhân tử chung $\sin x - 1$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + \frac{m2\pi}{3}\ (k, m \in \mathbb{Z})$

c) CĐ-2010. $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$

Gợi ý: Số hạng thứ nhất là một tích của hai hàm cos với góc $\frac{5x}{2}$ và $\frac{3x}{2}$, nếu biến tích thành tổng thì sẽ thu được hai hàm cos với góc 4x và x.

Đáp số: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

d) CĐ-2008. $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

Gợi ý: Vế trái là biểu thức bậc nhất với hai hàm sin 3x và cos 3x nên ta có thể quy về 1 hàm

Đáp số: Đáp số: $\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}$

<u>Bài 2.</u> Giải các phương trình sau:

a) $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$ CĐ-2012

Gợi ý: Phương trình có chứa sin 3x và sin x, và (3x + x)/2=2x nên tự nhiên ta nghĩ đến việc nhóm sin 3x với sin x

Đáp số: $= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

b) $(1 + 2\sin x)^2\cos x = 1 + \sin x + \cos x$ CĐ-2009

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Bình luận: $\cos x, 1 + \sin x$ có nhân tử chung là $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$. Do đó, pt trình có thể giải theo cách khác.

c) $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$ KA-2007

Gợi ý: Mỗi vế của phương trình có dạng đối xứng với hai hàm sin x và cos x, nên có thể biểu diễn mỗi vế theo tổng sin x + cos x. Hơn nữa vế trái $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$, trong khi nếu khai triển mỗi số hạng ở vế trái ta đều thu được tổng sin x + cos x. Do đó, pt sẽ quy về dạng tích.

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$

d) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$ KA-2003

Gợi ý: $\cot x - 1 = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}, \cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x), \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x(\sin x - \cos x)$. Do đó, phương trình đã cho có thể đưa về dạng tích. **Đáp số:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

e) $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

Gợi ý: Biến đổi tử và mẫu thành tích. Đặt điều kiện rồi rút gọn. Chú ý kết hợp nghiệm

Đáp số: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

-- Hết --

Chúc các em thành công trong kì thi sắp tới!

Giáo viên biên soạn: **Nguyễn Thế Phúc**
Điện thoại: **0912 208 425**
Email: **nguyenthephuc@gmail.com**

Tài liệu tham khảo

1. <u>Phuong Trinh Luong Giac khac -Nguyen Tat Thu.pdf</u>
2. <u>Phuong trinh luong giac khac – Quach Van Giang (youtube)</u>
3. <u>Ky-thuat-giai-nhanh-luong-giac (khong ro tac gia)</u>
4. <u>Bai-giang-18-Phuong-trinh-luong-giac.pdf</u>
5. <u>Phuong trinh luong giac, Nguyen Van Thien.pdf</u>
6. <u>Phuong trinh luong giac, Tran Phuong.pdf</u>
7. <u>Phuong_trinh_luong_giac - ltdh Nguyen Duc Thang.pdf</u>
8. <u>Ky-nang-nham-nghiem-Tran-Quoc-Luat.docx</u>